当代数学讲座丛书

Lectures in Contemporary Mathematics 1

现代黎曼几何简明教程

曹建国　王友德　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是一本现代 Riemann(黎曼)几何的简明教材, 共分两部分. 第一部分为一至四章, 介绍 Riemann 几何的基础知识, 内容包括多种形式的比较定理、Calabi-Yau 体积估计、郑绍远最大直径定理和 Cheeger 有限定理的讨论等. 内容新颖且简单明了, 尤其是比较定理的证明采用常微不等式的方法, 不同于经典的变分方法, 新的证明和讨论通俗易懂、简易明畅. 本书的第二部分包括第五、六和七章, 分别讨论测地流、负曲率流形和正曲率流形这三大现代 Riemann 几何研究领域的最新成果, 许多新的研究结果如 Cheeger-Gromoll 灵魂猜想的新证明都是第一次在中外几何教科书中出现.

本书可供从事 Riemann 几何相关领域研究的学者参考, 也可作为高年级本科生和研究生的教材和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

现代黎曼几何简明教程/曹建国, 王友德著. —北京:科学出版社, 2006

(当代数学讲座丛书; 1)

ISBN 7-03-016435-0

Ⅰ.现… Ⅱ.① 曹… ② 王… Ⅲ.黎曼几何-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 130425 号

责任编辑: 吕 虹／责任校对: 朱光光

责任印制: 钱玉芬／封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 1 月第一次印刷 印张: 10

印数: 1—3 500 字数: 180 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《当代数学讲座丛书》序

近二十年来, 中国数学有了引人注目的发展, 国际学术交流活动也大大增加. 许多大学和研究所都举办了不同层次的现代数学系列讲座或暑期学校 (例如自 1998 年开始举办的北京大学特别数学讲座), 聘请国内外著名数学家讲授课程或研究成果. 这为我国数学工作者和研究生提供了学习数学各学科的基础知识和接触前沿研究问题的极好机会, 大大促进了我国新一代青年数学家的成长.

《当代数学讲座丛书》是在这些学术交流活动以及系列讲座的基础上形成的, 其宗旨是面向大学数学及其应用专业的高年级学生、研究生以及青年数学工作者, 为他们提供高水平的专门教材. 本丛书通过整理优秀系列讲座、暑期学校中的精品课程以及其他各种形式的讲义, 着重介绍国际上前沿数学的研究领域, 使相关学生与年轻数学的工作者能在较短的时间内对数学各个领域的发展有较为深刻的了解, 尽快地掌握这些领域的基础知识和重大研究问题.

我国数学家的共同心愿是, 使中国在不久的将来成为数学强国. 为此必须造就越来越多的立足国内, 并具有国际影响的青年数学家. 我们相信此丛书的出版将为实现这一目标做出项献.

田　刚

2005 年 10 月 16 日

前　言

现代微分几何是当代数学研究中最活跃的领域之一, 从最近 30 年的发展来看, 基本上分成两个学派. 其中擅长于用微分方程来研究微分流形的学派日益壮大, 该学派在美籍华裔数学家丘成桐院士领导下, 成绩斐然. 例如关于 Yang-Mills 场, Calabi-Yau 流形和 Ricci 流的研究受到整个数学界和理论物理学界的瞩目. 微分几何的另一个重要分支是 Riemann(黎曼) 几何. 近年来以 Gromov 为代表人物. Gromov 研究几何的方法不侧重于偏微分方程, 他的开拓性工作如 Gromov-Witten 不变量等至今对几何、拓扑和理论物理的研究都起着很大的推动作用. Gromov 学派和上面介绍的几何分析学派具有相辅相成、紧密相连的关系. 一个国家的微分几何研究必须吸收这两个不同学派的长处, 两者缺一不可.

早在 1997 年, 中国数学会和丁伟岳院士就开始对 Riemann 几何以及 Gromov 学派的研究非常关注, 并且邀请本书的第一作者曹建国回国讲解这方面的研究动向, 同时邀请作者写了一篇综述文章发表在《数学进展》上, 目的在于进一步提高国内学术界对 Riemann 几何研究工作的兴趣.

中国国内关于 Riemann 几何的研究, 从人力投入和所取得的成果来看, 都还有很大的潜力, 因此有必要加强现代 Riemann 几何的传播和推广, 尤其是这方面人才的培养. 本书的目的是向这个目标努力, 希望起到抛砖引玉的作用.

本书的第一部分源于第一作者在“1998 年全国研究生暑期学校”的讲义. 当时, 著名数学家田刚院士邀请曹建国在南京大学举办的暑期学校讲授现代Riemann几何, 作者的讲义受到了来自全国各地的研究生和青年教师的欢迎. 后来几何学家戎小春教授和美国的魏深遂(Walter Wei)教授也试用过该讲义, 并给予作者很多鼓励.

本书的第二部分是作者们花了一年时间新添加的, 可供有兴趣的数学工作者参考. 其中第六章介绍了最近 10 年来对非正曲率的研究成果. 第七章关于非负曲率的流形的讨论也是所有教科书中很少见的, 如关于 Cheeger-Gromoll 灵魂猜想的新证明是 2003 年的新结果.

最后, 第一作者曹建国要感谢他过去的老师和合作者们, 其中特别要提到的是美国科学院院士 Calabi 教授和 Cheeger 教授. 作者受他们影响至深.

另外, 两位作者要分别感谢他们家人的协助与支持. 中国科学院的丁伟岳院士和南京大学的苏维宜教授以及科学出版社资深编辑吕虹为本书的出版给予了热情帮助与支持, 唐宏岩博士对本书进行了精心校订, 谨在此深致谢意.

希望本书对各位读者关于现代 Riemann 几何的学习研究有益.

曹建国　王友德

2004 年 12 月于北京

目　　录

第一部分　基础知识和基本定理

第二部分　现代理论选讲

《当代数学讲座丛书》出版书目

1　现代黎曼几何简明教程　2006.1　曹建国　王友德　著

2　非线性波动方程的现代方法　2005.12　苗长兴　著

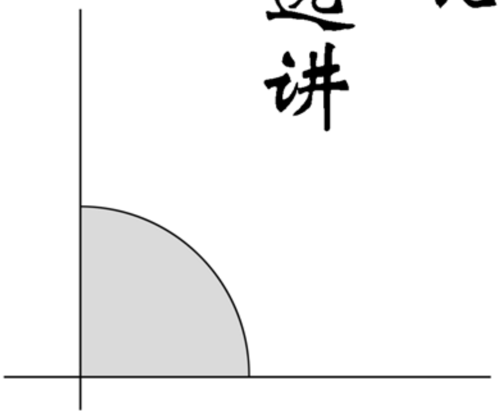
3　哈密顿 Ricci 流 (英文版)　Bennett Chow　Peng Lu　Lei Ni　著(待出版)

第一部分

基础知识和基本定理

第二部分

现代理论选讲



第一部分

基础知识和基本定理

第一部分主要介绍黎曼几何的基础知识, 包括相关的基本概念和一些重要的基本结果, 如多种形式的比较定理、郑绍远最大直径定理、Calabi-Yau 体积线性估计以及 Cheeger 有限定理等. 内容处理力求简洁明了, 特别地, 比较定理和郑绍远最大直径定理的证明不同于经典方法, 非常简单易懂.

这部分可供高年级本科生和研究生用作教材, 也可供数学工作者参考.

第一章　Riemann 流形

§1.1　流形、切空间和切丛

在我们的生活空间中有直线、平面、曲线和曲面. 光滑曲线就是人们所称的 1 维流形. 光滑曲面就是 2 维流形.

在讨论流形的精确定义之前, 我们再举些例子. 如果 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是个光滑函数, $\nabla f(x) \neq 0$ 对所有 $x \in f^{-1}(b)$ 成立, 则 $f^{-1}(b)$ 是一个 1 维流形. 例如取 $f(x,y) = x^2 + y^2$, 此时集合 $f^{-1}(1) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 是个 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周. 单位圆周就是个 1 维流形 (见图 1). 根据相同的道理, 如果 $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 是个光滑函数, $\nabla f(x) \neq 0$ 对所有的 $x \in f^{-1}(b)$ 都成立, 那么 $f^{-1}(b)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个光滑超曲面. 这样的光滑超曲面 $f^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = b\}$, 构成一个 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维光滑流形. 例如取 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, 则 $f^{-1}(0) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面. 抛物面当然是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一个光滑子流形.

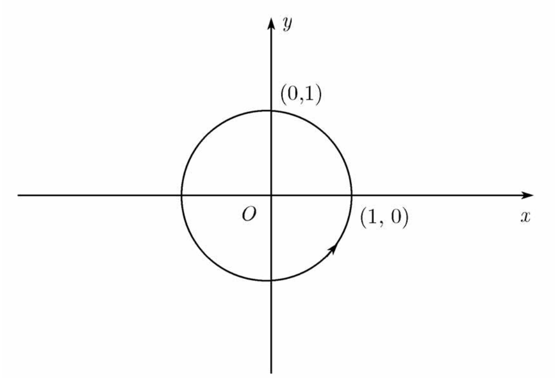


图 1　1 维流形单位圆周

定义 1.1　假设 M^n 是个 Hausdorff 空间. 如果对 M^n 中的任意一点 p, 都存在一个 M^n 中包含 p 点的开邻域 U_p 使得 U_p 同胚于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集, 此时我们则称 M^n 是个 n 维流形.

关于流形, 许多参考书都有精确的描述. 本书关于流形的应用, 将采用一个简单明了的等价定义. 这个简单的定义和 H. Whitney 的一个著名定理有关.

定理 1.2　任意给定一个 n 维的光滑流形 M^n, 总可以找到一个光滑嵌入映照 Φ: $M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$, 从而任何一个光滑的 n 维的流形 M^n 都可以看作 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的一个子流形. 记作 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

有了定理 1.2, 我们可以简化对切空间的描述. 假设 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的子流形. 对流形 M^n 中的任意一点 p, 我们可以用下列方法描述流形 M^n 在 p 点处的切空间, 简称 T_pM^n. 其实 T_pM^n 将是一个 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的一个线性子空间. 为了选择这样一个线性子空间, 我们考虑如下一个事实. 倘若 A_p: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个线性变换, 则 A_p 的像集 $\mathrm{Image}(A_p)$ 肯定是 $\mathbb{R}^m$ 中的线性子空间. 对我们来说, 我们可以取一个在 p 点周围的局部坐标系. 如果 W 是 M^n 中的包含 p 点的开邻域, 并假设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个包含原点的开集. 我们可以选取一个坐标映射 F: $U \to M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ 使得 $F(O) = p$. 因为 M^n 是一个光滑流形, 我们可以假设这样的映射 F 是个光滑映射. 上述向量值函数 F 在原点 O 当然有偏导数. 它的一阶偏导数矩阵 $F_*\Big|_O = \dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\Big|_O$ 就自然地诱导一个线性映照 $A_p = F_*|_O$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 这里我们取 $m = 2n+1$. 最后我们规定流形 M^n 在 p 点处的切空间 T_pM^n 为 $A_p(\mathbb{R}^n) = F_*|_O(\mathbb{R}^n)$. 由上述讨论, 我们可以概括为

定义 1.3　假设 $M^n \subset \mathbb{R}^m$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的光滑的 n 维子流形. $p \in M^n$ 和 F: $U \to M^n$ 是个满足 $F(O)=p$ 的局部坐标映射. 则我们称 $F_*\Big|_O = \dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\Big|_O$ 为 F 在 O 处的导数矩阵. 从而流形 M^n 在 p 处的切空间则定义为

$$T_pM^n = \mathrm{Image}(F_*|_O) = F_*|_O(\mathbb{R}^n).$$

上述定义从表面看来, 切空间 T_pM^n 似乎依赖于在该点处局部坐标系 (F, U) 的选择, 其实则不然. 下面的命题说明了这一点.

命题 1.4　假设 M^n 是个 $\mathbb{R}^m$ 中的光滑子流形, 则上述关于 M^n 在 p 点处切空间 T_pM^n 的定义不会依赖于局部坐标系 (F, U) 的选取.

证明　假设 (F, U) 和 (G, V) 为流形 M^n 在 p 点处的两个不同的局部坐标系且满足 $F(O) = G(O) = p$. 根据局部坐标系的定义, 两个不同的偏导数矩阵 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$ 和 $\dfrac{\partial(G_1,\cdots,G_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$ 秩数都为 n. 易见 $F(U)$ 和 $G(V)$ 都是 M^n 中的开集. 从而 $W = F(U) \bigcap G(V)$ 是 M^n 中的非空开集, 这是因为 $F(U)$ 和 $G(V)$ 同时包含 p 点. 令 $U' = F^{-1}(W)$ 和 $V' = G^{-1}(W)$. 我们显然有 $F(U') = G(V')$ (图 2). 上面已经说到 $F_*|_O$ 和 $G_*|_O$ 都是满秩矩阵, 所以 $F_*|_O(\mathbb{R}^n)$ 和 $G_*|_O(\mathbb{R}^n)$ 都是 n 维的线性子空间. 我们的目的是验证两个线性子空间重合相等. 因为 $F|_{U'} = G \circ (G^{-1} \circ F)$, 所以 $\mathrm{Image}(F_*|_O) \subset \mathrm{Image}(G_*|_O)$. 由同样的理由 $\mathrm{Image}(G_*|_O) \subset \mathrm{Image}(F_*|_O)$. 故

我们断言两者相等, 即 $T_pM^n = \mathrm{Image}(F_*|_O) = \mathrm{Image}(G_*|_O)$ 不依赖于局部坐标系 (F,U) 和 (G,V) 的选取.　证毕.

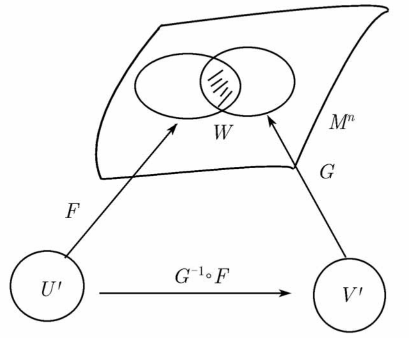


图 2

下面我们举几个切空间的例子.

例　(i) 首先我们考虑单位圆周. 这时我们有 $M^1 = S^1=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$. 当 $p=(1,0)$ 时, T_pS^1 是条过 p 点的垂直 x 轴的直线 (见图 3).

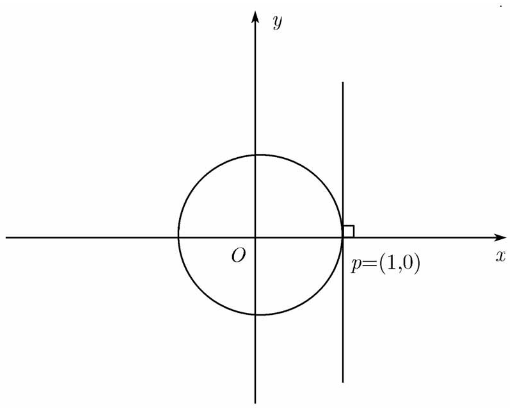


图 3

(ii) 接下来我们考虑一类 2 维流形. 他们可以看作在 3 维空间中的图像子流形. 假设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是个光滑函数, 该函数诱导出下述一个 2 维流形：

$$M^2 = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

实际上 M^2 是 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中由函数 f 的图像构成的曲面 (见图 4). 取 $p=(0,0,f(0,0))$. 我们考虑局部坐标映射

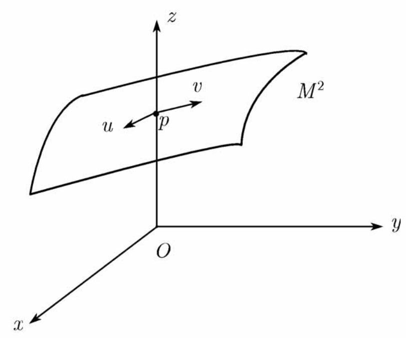


图 4

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to M^2,$$
$$(x, y) \to (x, y, f(x, y)),$$

则 $F_*|_O = \begin{pmatrix} 1, & 0, & f_x \\ 0, & 1, & f_y \end{pmatrix}$. 令 $u = (1, 0, f_x(0, 0))$ 和 $v = (0, 1, f_y(0, 0))$. 则 $T_pM^2 = F_*|_O(\mathbb{R}^2)=\text{Span}\{u, v\}$, 这里 $\text{Span}\{u, v\}$ 代表由 u 和 v 张成的线性子空间.

有了在一点处切空间的讨论, 我们可以顺理成章地引进切丛的概念.

定义 1.5　如果 M^n 是个 n 维的光滑流形, 它的切丛定义为

$$TM^n = \bigcup_{p\in M^n} T_pM^n.$$

§1.2　Riemann 联络和仿射联络

在引进切丛的概念以后, 我们可以讨论流形上的切向量场. 先举几个切向量场的例子.

例　考虑单位圆周 $M^1 = S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 我们首先将其参数化. 取曲线

$$\sigma\colon [0,\ 2\pi] \to S^1,$$
$$t \to (\cos t, \sin t).$$

这条曲线的轨迹位于单位圆周上. 曲线 σ 的速度向量则恰恰是单位圆周上的一个切向量. 显然

$$X(t) = \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

满足下列性质：对所有 t, $X(t) \in T_{\sigma(t)}S^1$ 成立 (见图 5).

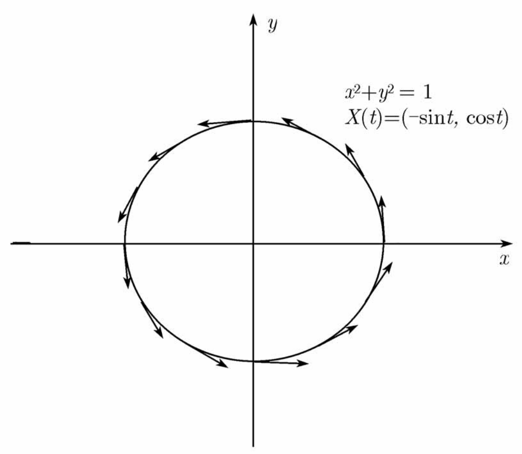


图 5

定义 1.6 假设 M^n 是个 n 维的光滑流形, 且假设

$$X\colon M^n \to TM^n$$

是个光滑向量值函数满足 $X(p) \in T_pM^n$, 则称 X 为 M^n 上的切向量场.

流形 M^n 上所有切向量场构成的集合, 通常记为

$$\Gamma(TM^n) = \Big\{X \mid X\colon M^n \to TM^n\text{是个切向量场}\Big\}.$$

在微分几何中, 有一个很自然的问题就是怎样对一个切向量场 $X \in \Gamma(TM^n)$ 求“导数”, 使得“X 的导数”也是一个切向量场.

从下面的一个简单例子可以看到在流形 M^n 上对一个切向量场“求导”不是一件轻而易举的事.

例 让我们继续考虑单位圆周上的向量场 $X(t) = \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, 这里我们仍然假设 $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$. 显而易见, $X(t)$ 的通常意义上的导数 $X'(t) = \sigma''(t) = (-\cos t, -\sin t)$ 已经不再满足 $X'(t) \in T_{\sigma(t)}M$.

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中紧的低维子流形 $M^n (n < m)$, 我们可以举出类似上面的例子, 即存在曲线 $\sigma\colon [a,b] \to M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $X(t) = \sigma'(t)$, 但是不满足 $X'(t) = \sigma''(t) \in T_{\sigma(t)}(M^n)$.

为了克服这一困难, 我们首先利用流形 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 的嵌入给出一个 Levi-Civita“求导数”方法的等价描述.

大家可以首先观察到如果 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 是个嵌入子流形, 对 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中任何一点 p 都有

$$T_p\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$$

成立, 并且当 $p \in M^n$ 时, $\mathbb{R}^{n+k} = T_p\mathbb{R}^{n+k}$ 有个相对 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 的经典分解

$$\mathbb{R}^{n+k} = T_p\mathbb{R}^{n+k} = T_pM^n \oplus N_pM^n,$$

这里 $N_pM^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid v \text{ 垂直于} T_pM^n \text{中的任何一个向量} \right\}$ 是 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 在 p 点处的法空间.

由于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 可以分解成 T_pM^n 和 N_pM^n, 我们可以考虑从 $\mathbb{R}^{n+k}$ 到 T_pM^n 上的自然投影, 记为

$$\begin{aligned} (\quad)^T\colon \mathbb{R}^{n+k} &\to T_pM^n, \\ v &\to v^T, \end{aligned}$$

这里 v^T 是 $v = v^T + v^N$ 的切分量.

对于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中任意两个向量值函数 X 和 Y, 我们用 $D_XY = (XY^1, \cdots, XY^{n+k})$ 表示 Y 在 X 方向的欧氏导数, 这里 $Y = (Y^1, \cdots, Y^{n+k})$.

定义 1.7 如果 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ 是个 n 维的光滑子流形, 假设 X 和 Y 是 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ 上的两个向量场, Y 关于 X 方向的协变导数为

$$\nabla_XY = (D_XY)^T,$$

这里 $(D_XY)^T$ 为 D_XY 的切分量.

我们在前面定义了 $\Gamma(TM)$ 为 M 上向量场的集合. 上述协变导数 ∇ 通常称为 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 上的 Levi-Civita 联络或 Riemann 联络. 我们首先观察到这个联络 ∇ 具有下列性质：

$$\begin{aligned} \nabla\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM), \\ (X, Y) &\to \nabla_XY, \\ \nabla_{fX}Y &= f\nabla_XY, \\ \nabla_X(fY) &= (Xf)Y + f\nabla_XY, \end{aligned}$$

这里 $f \in C^\infty(M^n)$ 是个光滑函数, $Xf = df(X)$ 是函数 f 在 X 方向的导数, $C^\infty(M^n)$ 代表 M^n 上的所有光滑函数组成的集合.

Riemann 联络除了有上述性质外, 还有两个重要性质. 一是所谓的无挠性, 另一个是和某个 Riemann 度量相容. 下面对这两个性质逐一描述.

如果 X, Y 是光滑流形 M^n 上的两个切向量场, 我们则令

$$[X,Y]f = XYf - YXf,$$

这里 $f \in C^\infty(M^n)$. 我们通常称 $[X,Y] = XY - YX$ 为 X 和 Y 的李括号积. 当 ∇ 是 M^n 上切丛 TM 上的仿射联络时, 我们考虑

$$\tau_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

这是一个关于变量 X 和 Y 都是线性的向量值函数：

$$\tau_\nabla\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM).$$

具体地说, 对所有光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, τ_∇ 满足

$$\tau_\nabla(fX,Y) = f\tau_\nabla(X,Y) = \tau_\nabla(X,fY).$$

由上述等式推出, $\tau_\nabla(X,Y)|_p$ 仅和 $X(p)$ 与 $Y(p)$ 有关, 但和它们的导数无关.

如果一个多重线性 (向量值) 函数 $\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 关于环 $C^\infty(M^n)$ 是线性的, 即满足

$$\begin{aligned}\alpha(fX_1, X_2, \cdots, X_k) &= \alpha(X_1, fX_2, \cdots, X_k)\\ &= \cdots\\ &= \alpha(X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, fX_k)\\ &= f\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

对所有 $f \in C^\infty(M^n)$ 和 $X_i \in TM$ 都成立, 则称 α 为一个 k 阶张量. 所以我们称 τ_∇ 为联络 ∇ 的二阶张量.

我们考虑一个最简单的情形. 令 $M^n = \mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间. 取 $\nabla_X Y = D_X Y$ 为通常的 Y 在 X 方向的方向导数. 我们来计算关于这个特殊的协变导数 ∇ 的 τ_∇. 取 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标向量场. 当 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, 注意到

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

我们有 $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. 更进一步地, 我们可以验证如下等式

$$\tau_\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0.$$

因此, 当 $\nabla = D$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上通常导数时, 我们推出 $\tau_\nabla \equiv 0$.

定义 1.8 (Riemann 度量) 假设 M^n 是个光滑流形, 对每一个 $p \in M^n$ 我们定义一个在 T_pM^n 上的内积, $g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, 则称 $g = \{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M^n} = \{g(p)\}_{p \in M^n}$ 为流形 M^n 上的一个 Riemann 度量. 称 (M^n, g) 为一个 Riemann 流形.

我们下面举例说明一类 Riemann 流形, 即讨论在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的 Riemann 子流形.

例 如 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 为一个欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的一个子流形. 显然欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中有个通常的欧氏内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$. 我们可以将它描述如下. 对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任何一对向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ 和 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$, 它们的内积为

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^m} = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_m\eta_m \ .$$

注意到 $T_pM^n \subset T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ 是个线性子空间, 从而 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 限制在 T_pM 上仍然是个正定内积, 记

$$g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}\big|_{T_pM^n} \ .$$

我们通常称 $g = \{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M^n}$ 为 M^n 上由嵌入 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 诱导的 Riemann 度量. 此时我将 $(M^n, g) \subset (\mathbb{R}^n, g_0)$ 称为 $\mathbb{R}^m$ 中的一个 Riemann 子流形, 这里 $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$.

我们不禁要问：是不是任何一个 Riemann 流形 (M^n, g) 都可以看成一个高维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的一个 Riemann 子流形? J. Nash 在 1957 年得出了一个肯定的答案.

定理 1.9 (Nash 嵌入定理) 设 M^n 是个抽象的 n 维光滑流形, 对任何给定 M^n 上的 Riemann 度量 g, 则存在一个 $m \geqslant 2n^2 + n$ 和一个等距嵌入

$$F\colon M^n \to \mathbb{R}^m,$$

使得 $\|F_*v\|_{\mathbb{R}^m} = \langle v, v \rangle_g^{\frac{1}{2}}$ 对所有 $v \in T_pM^n$ 和 $p \in M^n$ 成立. 也就是说, (M^n, g) 可以当作一个更高维欧氏空间 $(\mathbb{R}^m, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^m})$ 中的 Riemann 子流形.

J. Nash 对经济数学中的博弈论等也有卓越的贡献, 于 1994 年获诺贝尔经济学奖. 上述定理的证明比较复杂, 故略去.

从 Nash 嵌入定理出发, 我们的 Riemann 联络也就顺理成章地满足下列性质：如果 X、Y 和 Z 是 M^n 上的三个切向量场, $(M^n, g) \subset (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m})$, 则

$$\begin{aligned} X\langle Y,\ Z\rangle_g &= \langle D_XY,\ Z\rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle Y,\ D_XZ\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \langle (D_XY)^T,\ Z\rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle Y,\ (D_XZ)^T\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \langle \nabla_XY,\ Z\rangle_g + \langle Y,\ \nabla_XY\rangle_g. \end{aligned}$$

其实早在 Nash 嵌入定理发现之前, 意大利数学家 Levi-Civita 通过其他途径就已发现了 Riemann 几何中下述基本定理.

定理 1.10 (Levi-Civita 经典定理) 设 (M^n, g) 为一个光滑的 Riemann 流形, 则流形 M^n 的切丛 TM^n 上有唯一的仿射联络 ∇ 满足

$$X\langle Y,\ Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y,\ Z\rangle_g + \langle Y,\ \nabla_X Z\rangle_g, \tag{1.1}$$

$$\tau_\nabla(X,\ Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,\ Y] \equiv 0, \tag{1.2}$$

这里 X、Y 和 Z 是 M^n 上的切向量场.

证明 给定 $p \in M^n$, 我们取一个在点 p 处的局部坐标系 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}_{x\in U}$. 可以假设 p 对应于局部坐标系的原点 O. M^n 在 p 处的切空间 T_pM^n 可以同构于 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 张成的线性空间, 即 $T_pM^n \cong T_O(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Span}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$. 令

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_g \Big|_x,$$

$g = \{(g_{ij}(x))\}_{x\in M^n}$. 设 (g^{ij}) 是矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵.

每一个给定的仿射联络 ∇ 都有一个对应于局部坐标系 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 的局部表示, 通常叫做 Christoffell 记号. 也就是说, 由于 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 是一组局部基, 则有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

在数学文献中, $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ 称为联络 ∇ 的 Christoffell 记号.

联络 ∇ 满足条件 (1.1)~(1.2) 等价于相应的 Christoffell 记号 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 满足下列两种条件:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl}\right). \tag{1.4}$$

想要验证这个等价性, 我们从挠率张量着手. 上面我们已经指出, 李括号积 $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i},\ \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. 因此, 条件 $\tau_\nabla\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$ 就等价于

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

因为 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 是组基, 所以我们推出 (1.2) 等价于 (1.3).

当 $X=\dfrac{\partial}{\partial x_i}, Y=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $Z=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ 时, 等式 (1.1) 就化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\ \frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle\\&=\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j},\ \frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle\\&=\sum_{l=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^{l}g_{lk}+\Gamma_{ik}^{l}g_{jl}\right).\end{aligned}$$

这恰恰是 (1.4). 由 (1.3)~(1.4) 解出

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).\tag{1.5}$$

因为 Christoffell 记号由 (1.5) 唯一决定, 所以给定 g, 存在唯一的联络满足 (1.1)~(1.2). 证毕.

下面我们将 Riemann 联络向两个方面推广. 一是将切丛推广到任何流形上的向量丛, 二是讨论和度量独立的仿射联络.

定义 1.11 如果 M^n 上的一个纤维丛

$$\mathbb{R}^k\longrightarrow E\stackrel{\pi}{\longrightarrow}M^n$$

的纤维 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 同构于 k 维向量空间, 则称 E 为 M^n 上的一个向量丛.

如果一个向量值函数 $\sigma\colon M^n\to E$ 满足性质 $\pi(\sigma(x))=x$, 则称 σ 为 M^n 上取值于 E 的一个截面. 令

$$\varGamma(E)=\left\{\sigma\mid\sigma\colon M^n\to E,\quad \pi(\sigma(x))=x\ \text{对所有}\ x\ \text{成立}\right\}.$$

如果一个双线性函数

$$\nabla\colon\varGamma(TM)\times\varGamma(E)\to\varGamma(E),$$

$$(X,\ \sigma)\to\nabla_X\sigma,$$

满足

$$\nabla_{fX}\sigma=f\nabla_X\sigma,\tag{1.6}$$

$$\nabla_X(f\sigma)=(Xf)\sigma+f\nabla_X\sigma,\tag{1.7}$$

则称 ∇ 为 E 的一个仿射联络, 这里 $f \in C^\infty(M^n)$ 是个实数值的光滑函数, $\sigma \in \Gamma(E)$ 是个截面.

我们举个例子说明向量丛上的仿射联络.

例 假设 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 是个光滑子流形, 对每一点 $x \in M^n$, 我们考虑它的法空间:

$$N_x M^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid v \perp T_x M^n \right\}.$$

显然, 法向量丛 $NM^n = \bigcup\limits_{x \in M^n} N_x M^n$ 是 M^n 上的一个向量丛.

令 $E = NM^n$, D 为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中普通导数符号. 假设 $X \in \Gamma(TM)$ 是个切向量场, $\sigma \in \Gamma(E)$ 为一个法向量场, 则存在一个很自然的 NM^n 上的联络:

$$\nabla_X \sigma = (D_X \sigma)^\perp,$$

这里 $\xi^\perp$ 表示向量 ξ 的法分量.

最后我们要指出的是: 给定一个流形 M^n 上的一个向量丛 E, 进入 20 世纪 80 年代以后, 数学家和物理学家们开始深入地研究向量丛 E 上的所有仿射联络构成的空间. 当 $n = 4$ 且 E 为 2 维复向量丛时, 这就是通常的 Yang-Mills (杨振宁-Mills) 场论. 这个理论至今方兴未艾, 发展为研究 Gromov-Witten 不变量理论和量子上同调论等.

我们要特别讨论的是个关于仿射联络的模空间的简单事实. 假设 ∇ 和 ∇' 为同一个向量丛 $E \xrightarrow{\pi} M^n$ 上的两个不同的仿射联络, 我们断言“两个仿射联络的差必是一个张量”.

具体地说, 我们令

$$\Phi(X,\ \sigma) = \nabla_X \sigma - \nabla'_X \sigma.$$

不难验证, 对每一个 M^n 上的光滑函数 $f \in C^\infty(M^n)$, 由 (1.6)~(1.7) 推出

$$\Phi(fX,\ \sigma) = f\Phi(X,\ \sigma) = \Phi(X,\ f\sigma), \tag{1.8}$$

从而 Φ 是个张量, 即 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 关于 $C^\infty(M^n)$ 线性.

反过来, 如果 ∇ 是向量丛 $E \xrightarrow{\pi} M^n$ 上固定的一个仿射联络, 且如果 Φ: $\Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ 是个满足 (1.8) 的张量, 则算子

$$\nabla^\Phi\text{: } \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$(X,\ \sigma) \to \nabla_X \sigma + \Phi(x,\ \sigma)$$

满足 (1.6)~(1.7). 因此 ∇^{Φ} 是向量丛 E 上的新联络.

从上述讨论推出, 仿射联络构成的集合同构于集合：

$$\mathfrak{M}(E)=\Big\{\Phi\colon \varGamma(TM)\times\varGamma(E)\to\varGamma(E)\mid \Phi\text{满足}(1.8)\Big\}.$$

在本书的第二章, 我们将讨论曲率张量. 当 n 为 4 且 E 为复 2 维向量丛时, 人们从 20 世纪 80 年代中期开始讨论具有最小总曲率的联络, 这样的联络称为 Yang-Mills 联络. 自然地, Donaldson 开始系统地研究所有 Yang-Mills 联络构成的模空间.

$$\begin{aligned}Y\mathfrak{M}(E,\ M^4)&=\Big\{\nabla\mid\nabla\text{具有最小总曲率}\Big\}\\&=\Big\{\nabla\mid\nabla\text{的曲率张量 }\Omega^{\nabla}\text{ 自对称或反自对称}\Big\}.\end{aligned}$$

所谓的 Donaldson 不变量是和 $Y\mathfrak{M}(E,M^4)$ 相关的拓扑不变量. 进入 20 世纪 90 年代中期, E. Witten 等人另辟蹊径, 用 Seilberg-Witten 不变量等价地描述 Donaldson 理论. 由此产生的 Gromov-Witten 不变量和量子上同调论成为现代数学物理的热门课题.

下面我们介绍本书的重点 Riemann 几何.

§1.3　向量场的平行移动和测地线

本节将讨论向量在光滑曲线上的平行移动. 我们先以 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线为例.

假设 $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 是一条直线 $\sigma(t)=(t,0,0)$, 在 σ 上有许多向量场 X 使得它们的轨迹会绕 σ 旋转, 见图 6. 如 $X(t)=(0,\cos t,\sin t)$.



图 6

对每个向量场, 我们可以考虑它的消耗能量

$$E(X)=\int_a^b\|\nabla_{\sigma'}X\|^2dt.$$

当然在 σ 上的能量最小的向量场满足 $\nabla_{\sigma'}X\equiv 0$.

定义 1.12　设 (M^n, g) 是 Riemann 流形, σ: $[a,b] \to M^n$ 是条光滑曲线, X 是 σ 上的向量场 (即 $X(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}M^n$), 如果 $\nabla_{\sigma'}X \equiv 0$, 则称 X 为 σ 上的平行向量场.

例　设 $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, g_0)$ 是 n 维欧氏空间, σ: $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 是条光滑曲线, 如果 $X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是 σ 上的平行向量场, 则

$$0 = \nabla_{\sigma'}X = D_{\sigma'}X = (x_1'(t) \cdots, x_n'(t)),$$

从而 $X'(t) = 0, X = (a_1, \cdots, a_n)$ 是个常值向量场.

平行向量场有许多有用的性质.

命题 1.13　设 (M^n, g) 是 n 维光滑 Riemann 流形, σ: $[a,b] \to M^n$ 中的一条光滑曲线, 则

(1) 对任何初始向量 $X_0 \in T_{\sigma(a)}M^n$, 存在唯一的 σ 上的平行向量场 X 使得 $X(a) = X_0$.

(2) 如果 V 和 W 是 σ 上的平行向量场, 则

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle \equiv 0.$$

证明　(1) 设 F: $U \to M^n$ 为 $\sigma(a)$ 处的局部坐标系

$$X(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nabla_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

则 $\nabla_{\sigma'}X = 0$ 当且仅当

$$0 = \nabla_{\sigma'}X = \sum_{i=1}^n f_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_i(t)a_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

即

$$f_i'(t) + \sum_{j=1}^n f_j(t)a_{ji}(t) = 0. \tag{1.9}$$

给定初始条件 $f_i(a) = c_i, i = 1, \cdots, n$, 方程组 (1.9) 有唯一解.

(2) 因为 $\{V(t)\}$ 和 $\{W(t)\}$ 都是 σ 上的平行向量场, 所以我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle &= \langle \nabla_{\sigma'}V, W\rangle + \langle V, \nabla_{\sigma'}W\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

证毕.

上述命题有一个今后常用的推论

推论 1.14 设 $\sigma : [a,b] \to M^n$ 是 Riemann 流形 (M^n, g) 中的一条光滑曲线, 则 σ 上存在一组平行正交向量场 $\{E_i(t)\}$.

证明 取 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $T_{\sigma(a)}M^n$ 的一组正交基, 从而有

$$\langle e_i, e_j \rangle_g = \delta_{ij}.$$

由命题 1.13 得出：存在沿 σ 平行的向量场 $\{E_i(t)\}$ 使得 $E_i(a) = e_i$, 并且还满足

$$\langle E_i(t), E_j(t) \rangle = \langle E_i(a), E_j(a) \rangle = \delta_{ij}.$$

证毕.

我们要特别指出：如果 σ：$[a,b] \to M^n$ 是 Riemann 流形中的光滑曲线, $\nabla_{\sigma'}\sigma'$ 不一定为零, 即切向量场 σ' 不一定沿 σ 平行. 简短的例子有：σ：$[0,1] \to \mathbb{R}^n, \sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, 容易看到 $\nabla_{\sigma'}\sigma' \equiv D_{\sigma'}\sigma' = \sigma''(t) = -(\cos t, \sin t) \neq 0$.

其实曲线 σ 的自协变导数 $\nabla_{\sigma'}\sigma'$ 是曲线本身的几何不变量.

定义 1.15 设 σ：$[a,b] \to M^n$ 是 Riemann 流形 (M^n, g) 中的光滑曲线, 则 $\nabla_{\sigma'}\sigma'$ 称为 σ 的测地曲率向量 (或称为 σ 的加速度), 这里 $\sigma'(t)$ 表示曲线在 $\sigma(t)$ 处的导数. 如果 $\nabla_{\sigma'}\sigma' \equiv 0$, 则曲线 σ 称为 M^n 中的测地线.

下面我们举几个测地线的例子.

例 (1) 我们来考虑 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, g_0)$. 任何 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线 σ 都可写成

$$\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)).$$

此时, 测地线方程可简化为

$$0 = \nabla_{\sigma'}\sigma' = \sigma''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \cdots, x_n''(t)).$$

σ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的测地线当且仅当

$$\sigma(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, \cdots, a_n t + b_n)$$

是条 $\mathbb{R}^n$ 中的直线.

(2) 假设 $(M^2, g) = S^2(1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 (图 7)

$$S^2(1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

考虑大圆周赤道曲线

$$\begin{aligned} \sigma\text{：}\quad & [0, 2\pi] \to S^2(1), \\ & t \to (\cos t, \sin t, 0). \end{aligned}$$

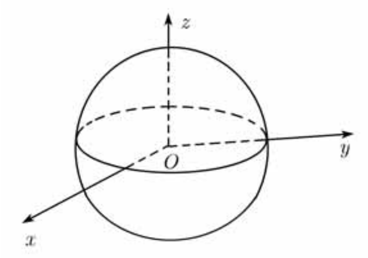


图 7

简单的计算表明

$$\nabla_{\sigma'}\sigma' = (D_{\sigma'}\sigma')^T = (\sigma'')^T = 0,$$

这里 $\sigma''(t) = -(\cos t, \sin t, 0)$ 是 $S^2(1)$ 在 $\sigma(t)$ 处的法向量, 所以 $(\sigma'')^T = 0$.

设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 M^n 的一条局部坐标系, 令

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

如果 $\sigma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 满足测地线方程 $\nabla_{\sigma'}\sigma' = 0$, 则

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\sigma'}\sigma' = \nabla_{\sigma'}\left(\sum_{i=1}^n x_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[x_i''(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i'(t)\nabla_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[x_i''(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i'(t)\nabla_{\sum\limits_{j=1}^n x_j'(t)\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \left[x_k''(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t))x_i'(t)x_j'(t)\right]\frac{\partial}{\partial x_k},
\end{aligned}$$

从而在局部坐标系 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 中测地线方程为

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t))\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0. \tag{1.10}$$

定理 1.16 设 (M^n, g) 是个光滑 Riemann 流形, $p \in M^n$. $v \in T_pM^n$, 则存在唯一的测地线 σ_v: $[a, b] \to M^n$ 使得 $\sigma_v(a) = p$ 和 $\sigma_v'(a) = v$. 如果 σ: $[a, b] \to M^n$ 是条测地线, 则 $\left\|\dfrac{d\sigma}{dt}\right\| \equiv$ 常数.

证明 设 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ 为 M^n 在 p 点的一个局部坐标系, 即 F: $U \to M^n$ 是微分同胚, $F(O) = p$. 则测地线方程 (1.10) 有唯一解满足

$$\begin{cases} x_k(0) = 0, \\ x_k'(0) = v_k \end{cases}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 成立.

当 σ：$[a, b] \to M^n$ 是条测地线时, 我们观察到

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma', \sigma' \rangle = \langle \nabla_{\sigma'}\sigma', \sigma' \rangle + \langle \sigma', \nabla_{\sigma'}\sigma' \rangle = 0,$$

所以 $\dfrac{d}{dt}(\|\sigma'(t)\|^2) \equiv 0$, 从而 $\left\|\dfrac{d\sigma}{dt}\right\| =$ 常数. 证毕.

§1.4 第一变分公式

我们对测地线感兴趣主要是因为它与连接任何两点的最短曲线有关. 如 σ：$[a, b] \to M^n$ 是 Riemann 流形 (M^n, g) 中的分段光滑曲线, 则 σ 的长度为

$$L(\sigma) = \int_a^b \left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\| dt.$$

自然地, 由度量 g 诱导的距离为

$$d_g(p, q) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma\text{：}[0, 1] \to M^n, \sigma(0) = p, \sigma(1) = q\}.$$

为了理解最短曲线的几何性质, 我们考虑曲线的单参数变分. 设

$$\beta\text{：} \quad [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n,$$
$$(t, s) \to \beta(t, s),$$

满足 $\beta(t, 0) = \sigma(t)$, 则称 $\beta_s(\cdot) = \beta(\cdot, s)$ 为 σ 的一个变分, 而且

$$V(t) = \frac{\partial \beta}{\partial s}(t, 0)$$

为 σ 上的变分向量场.

下面的公式在几何研究中经常用到.

命题 1.17 设 σ, β, V 和 (M^n, g) 如上, $\|\sigma'(t)\| = l$. 则

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\|\frac{\partial \beta}{\partial t}(t, s)\right\|\Big|_{s=0} = \frac{1}{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle \sigma', V \rangle - \langle V, \nabla_{\sigma'}\sigma' \rangle\right]. \tag{1.11}$$

证明　当 $s=0$ 时, 我们观察到

$$\left[\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial s}\right]=\beta_*\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}\right]=0,$$

所以 $\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\dfrac{\partial\beta}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\dfrac{\partial\beta}{\partial s}$, 而且 (当 $s=0$ 时)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left\|\frac{\partial\beta}{\partial t}(t,s)\right\|\Bigg|_{s=0}&=\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\frac{2\left\langle\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\dfrac{\partial\beta}{\partial t},\dfrac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle}{\left\langle\dfrac{\partial\beta}{\partial t},\dfrac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{l}\left\langle\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle\\
&=\frac{1}{l}\left\langle\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial s},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle\\
&=\frac{1}{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial s},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle\right]\\
&=\frac{1}{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle V,\sigma'\rangle-\langle V,\nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle\right].
\end{aligned}$$

证毕.

上述公式 (1.11) 通常称为第一变分公式. 下面是这个公式的直接推论.

定理 1.18　设 (M^n,g) 是个光滑 Riemann 流形, $p,q\in M^n$, 设 σ: $[a,b]\to M^n$ 是连 p 到 q 的最短线满足 $\|\sigma'\|\equiv l$. 则 σ 必为 M^n 中的测地线.

证明　设 σ: $[a,b]\to M^n$ 是连 p 到 q 的最短曲线. 我们考虑两端点固定的单参数变分

$$\begin{aligned}\beta:\ &[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M^n,\\ &(t,s)\to\beta(t,s),\end{aligned}$$

满足 $\beta(t,0)=\sigma(t)$ 和 $\begin{cases}\beta(a,s)\equiv p,\\ \beta(b,s)\equiv q.\end{cases}$ 因此, 相应的变分向量场 $\{V(t)\}$ 满足

$$V(a)=0=V(b).$$

因为 $\|\sigma'(t)\| \equiv l$, 应用第一变分公式我们推出, 当 $s=0$ 时有

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}L(\beta_s(\cdot))\bigg|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\|\frac{\partial \beta}{\partial t}(t,s)\right\| dt\ \bigg|_{s=0} \\
&= \int_a^b \frac{1}{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle V,\sigma'\rangle - \langle V,\nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle\right]dt \\
&= \frac{1}{l}\left[\langle V(b),\sigma'(b)\rangle - \langle V(a),\sigma'(a)\rangle\right] - \frac{1}{l}\int_a^b \langle V,\nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle dt.
\end{aligned}$$

因此, $\int_a^b \langle V(t),\nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle dt = 0$ 对任何变分向量场 V 成立, 我们推出

$$\nabla_{\sigma'}\sigma' = 0,$$

即 σ 是一条 M^n 中的测地线.　证毕.

§1.5　指数映照, 完备性和 Hopf-Rinow 定理

对于任何一个 Riemann 流形 (M^n,g), 我们在上节讨论了相应的距离函数 d_g. 我们不禁要问：在什么条件下, 度量空间 (M^n,d_g) 是个完备的度量空间？这个问题和 Riemann 流形 (M^n,g) 的测地完备性有关, 为此我们考虑指数映照.

定义 1.19　设 (M^n,g) 是个光滑的 Riemann 流形, $p\in M^n, v\in T_pM^n, \sigma_v\colon [0,1] \to M^n$ 是条测地线满足 $\sigma_v(0)=p, \sigma_v'(0)=v$. 令

$$\mathrm{Exp}_p v = \sigma_v(1). \tag{1.12}$$

下面命题说明 Exp_p 对充分小的向量 v 有定义.

命题 1.20　设 $\sigma_w\colon [0,\delta]\to M^n$ 是 Riemann 流形 (M^n,g) 中的测地线满足 $\sigma_w(0)=p$ 和 $\sigma_w'(0)=w$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 曲线

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varepsilon w}\colon\quad &\left[0,\ \ \frac{\delta}{\varepsilon}\right] \to M^n, \\
&t \to \sigma_w(\varepsilon t).
\end{aligned}$$

是条满足 $\sigma_{\varepsilon w}(0)=p$ 和 $\sigma_{\varepsilon w}'(0)=\varepsilon w$ 的测地线.

证明　$\nabla_{\sigma_{\varepsilon w}'}\sigma_{\varepsilon w}' = \varepsilon^2\nabla_{\sigma_w'}\sigma_w' = 0$. 初始条件可直接验证.　证毕.

因为 $\overline{B_1(O)} = \{v\in T_pM \big| \|v\|\leqslant 1\}$ 是个紧集, 由于命题 1.20, 我们看到存在 $\varepsilon=\varepsilon(p)>0$ 使得在 $B_\varepsilon(O)$ 上 Exp_p 有定义. 如果 $\mathrm{Exp}_p\colon T_pM^n\to M^n$ 有定义, 则称 (M^n,g) 是测地完备的.

定理 1.21 (Hopf-Rinow)　下列讲法都是等价的.

(a) (M^n, d_g) 是个完备的度量空间;

(b) 存在 $p_0 \in M^n$, 使得 $\mathrm{Exp}_{p_0}\colon T_{p_0}M^n \to M^n$ 有定义;

(c) 对任何 $p \in M^n$, $\mathrm{Exp}_p\colon T_pM^n \to M^n$ 有定义.

上述结论中的任何一个都蕴含下列结论:

(d) M^n 中的任何两点 p 和 q 都可以用一条最短测地线连接起来.

在给出定理 1.21 的证明之前, 先用例子说明结论 (d) 和 (a)~(c) 的关系.

在实际应用中, 用 (a) 推出 (d) 非常重要. 特别地, 当 M^n 是个紧致无边的流形时, 对任何 M^n 上的度量 g, (M^n, d_g) 总是完备的. 因此 (a) 是个很自然的假设. 反之如结论 (d) 成立时, 则 (a) 不尽然. 请看下列例子: 令 $M^2 = D^2(1) = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 为单位开圆盘, 取 g_0 为欧氏度量 $g_0 = dx^2 + dy^2$, 显然 (M^2, d_{g_0}) 不是个完备空间, 从而结论 (a) 不成立. 可是, 此时因为 $D^2(1)$ 是个凸集, 所以 M^2 中任何两点 p 和 q 都可用直线相连, 因此 (d) 成立.

另外, 我们要指出的是, Riemann 几何中的指数映照 Exp_p 和李群论中的指数映照是紧密联系的.

设 $A = (a_{ij})$ 是 m 阶方阵, $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ 为 m 阶恒等矩阵. 我们可令

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots.$$

令 $n = m^2 - 1$. 倘若 $M^n = SL(m, \mathbb{R}) = \{A | \det(A) = 1\}$, 则 M^n 在 I 处的切空间为

$$T_I M^n = sl(m, \mathbb{R}) = \{\xi | \xi + \xi^T = 0\}.$$

当 ξ 为斜对称矩阵时, $\det(e^\xi) = e^{\mathrm{tr}\xi} = e^0 = 1$. 在 $T_I M^n = sl(m, \mathbb{R})$, 我们定义内积为

$$\langle \xi, \eta \rangle_I = \mathrm{tr}(\xi \eta^T),$$

这里 $\xi, \eta \in sl(m, \mathbb{R})$ 均为斜对称矩阵. 用 $SL(m, \mathbb{R})$ 上的左移动, 我们可以在 $M^n = SL(m, \mathbb{R})$ 上定义一个左不变的度量 g. 可以证明, 与任何 $\xi \in sl(m, \mathbb{R}) = T_I M^n$ 相应的单参数子群

$$\varphi_\xi(t) = A(t) = e^{t\xi}$$

是 (M^n, g) 中的一条测地线.

下述引理在定理 1.21 的证明中非常有用.

引理 1.22 (Gauss引理)　假设 $\rho(t)=tv$ 是 $\mathbb{R}^n=T_pM^n$ 中过原点的一条直线, $w\in T_{\rho(t_0)}(T_pM^n)=T_{\rho(t_0)}\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n, w$ 垂直于 $\rho'(t)$, 则

$$\langle(\mathrm{Exp}_p)_*|_{\rho(t_0)}\rho'(t_0),(\mathrm{Exp}_p)_*|_{\rho(t_0)}w\rangle=0. \tag{1.13}$$

证明　如果 $w=0$, (1.13) 自然成立. 只需证明当 $\| w \|=1$ 时 (1.13) 成立. 考虑

$$v(s)=\| v \| \left(\frac{v}{\| v \|}\cos s+w\sin s\right),$$

则 $v(0)=v, v'(0)=||v||w$. 再考虑

$$\begin{aligned}\beta(t,s)&=\mathrm{Exp}_p[tv(s)]\\&=\mathrm{Exp}_p\left[t\| v \|\left(\frac{v}{\| v \|}\cos s+w\sin s\right)\right].\end{aligned}$$

因为 $\| w \|=1, \| v(s) \|=\| v \|$, 所以

$$L(\beta(\cdot,s))=\int_0^{t_0}\left\|\frac{\partial\beta}{\partial t}(t,s)\right\|dt\equiv\| v \| t_0.$$

由第一变分公式得：当 $V(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial s}(t,0), \sigma(t)=\beta(t,0)$ 时

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial}{\partial s}L(\beta(\cdot,s))|_{s=0}&=\frac{1}{\|v\|}\int_0^{t_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle V,\sigma'\rangle-\langle V,\nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle\right]dt\\&=\langle V(t_0),\sigma'(t_0)\rangle-\langle V(0),\sigma'(0)\rangle\\&=\langle(\mathrm{Exp}_p)_*|_{\rho(t_0)}w,(\mathrm{Exp}_p)_*|_{\rho(t_0)}v\rangle.\end{aligned}$$

证毕.

Gauss 引理有两个直接推论.

推论 1.23　设 $\overline{B_{\varepsilon_0}(O)}=\{v|\ \| v \|\leqslant\varepsilon_0, v\in T_pM^n\}, \mathrm{Exp}_p$：$\overline{B_{\varepsilon_0}(O)}\to M^n$ 是个嵌入. 记 $B_{\varepsilon_0}(p)=\mathrm{Exp}_p(\overline{B_{\varepsilon_0}(O)})$. 则

(1) 对每个 $v\in B_{\varepsilon_0}(O), \sigma_v(t)=\mathrm{Exp}_p(tv), \sigma_v$：$[0,1]\to M^n$ 是唯一的曲线, 满足

$$L(\sigma_v)=d(p,\sigma_v(1))=\|v\|.$$

特别地, 如果其他曲线 ψ：$[0,1]\to M^n$ 和 σ_v 有同样的端点和长度, 则经过一个适当的参数变换后, $\psi=\sigma_v$.

(2) 如果 $q\notin B_{\varepsilon_0}(p)$, 则存在 $q'\in\partial B_{\varepsilon_0}(p)$ 使得

$$d(p,q)=\varepsilon_0+d(q',q)=d(p,q')+d(q',q). \tag{1.14}$$

特别地, $d(p,q) \geqslant \varepsilon_0$.

证明 (1) 令 $r(q)=d(p,q), \psi\colon [0,1]\to M^n$ 满足 $\psi(0)=p, \psi(1)=\mathrm{Exp}_p v$. 因为 $\|\nabla r\| = \left\|\dfrac{\partial}{\partial r}\right\| = 1$, 所以

$$\|\psi'(t)\| \geqslant \langle \psi'(t), \nabla r\rangle = \frac{d}{dt}[r(\psi(t))].$$

等式成立当且仅当 $\psi'(t)=\lambda(t)\nabla r, \lambda(t)\geqslant 0$. 考虑

$$t_1 = \sup\{t|\psi([0,t]) \subset \mathrm{Exp}_p(\overline{B_{\varepsilon_0}(O)})\}.$$

如果 $t_1<1$, 则 $\psi(t_1)\in \partial B_{\varepsilon_0}(p)$,

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_0^{t_1} \|\psi'(t)\| dt + \int_{t_1}^1 \|\psi'(t)\| dt \\ &\geqslant \int_0^{t_1} \langle \psi', \nabla r\rangle dt = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}[r(\psi(t))] dt \\ &= r(\psi(t_1)) - r(\psi(0)) = \varepsilon_0 \geqslant \|v\|. \end{aligned}$$

等式成立当且仅当 $t_1=1, \psi'(t)=\lambda(t)\nabla r = \lambda(t)\dfrac{1}{\|v\|}\sigma_v'(t), \|v\|=\varepsilon_0$. 所以, 在此情形, $L(\psi)>\|v\|$. 如果 $t_1=1$, 如上推导, 我们有

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_0^1 \|\psi'(t)\| dt \geqslant r(\psi(1)) - r(\psi(0)) \\ &= d(p, \sigma_v(1)) = \|v\|. \end{aligned}$$

等式成立当且仅当 $\psi'(t)=\lambda(t)\nabla r = \lambda(t)\dfrac{1}{\|v\|}\sigma_v'(t)$. 这就证明了 (1).

(2) 设 $\psi\colon [0,1]\to M^n$ 是连 p 到 q 的曲线, 令

$$t_0 = \inf\{t|\psi(t)\in \partial B_{\varepsilon_0}(p)\}.$$

由上述 (1) 推出

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_0^{t_0} \|\psi'(t)\| dt + \int_{t_0}^1 \|\psi'(t)\| dt, \\ &\geqslant \varepsilon_0 + d(\partial B_{\varepsilon_0}(p), q), \end{aligned} \tag{1.15}$$

从而

$$d(p,q) \geqslant \varepsilon_0 + d(\partial B_{\varepsilon_0}(p), q).$$

反过来, 由 (1) 和三角不等式得出

$$
\begin{aligned}
d(p,q) &\leqslant \inf_{q'\varepsilon\partial B_{\varepsilon_0}(p)}\{d(p,q')+d(q',q)\}\\
&=\varepsilon_0+\inf_{q'\in\partial B_{\varepsilon_0}(p)} d(q',q).
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

因为 $\partial B_{\varepsilon_0}(p)$ 紧, 所以 $\exists\ \hat{q}'$ 使得

$$
d(\hat{q}',q)=d(\partial B_{\varepsilon_0}(p),q). \tag{1.17}
$$

从 (1.15)~(1.17) 得出

$$
d(p,q)=d(\hat{q}',q)+\varepsilon_0.
$$

证毕.

Gauss 引理的第二个应用是下面定理 1.21 证明过程中的推论 1.24.

定理 1.21 的证明　我们的计划是先证 (c)⇒(d), 然后 (b)⇒(a)⇒(c)⇒(b). 下面推论意味着 (c)⇒(d).

推论 1.24　如果 $\mathrm{Exp}_{p_0}\colon T_{p_0}M^n\to M^n$ 有定义, 则对任何 $q\in M^n$, 都存在一条最短测地线 $\sigma_v\colon [0,l]\to M^n$ 使得 $q=\sigma_v(l), L(\sigma_v)=d(p_0,q)$, 这里 $\sigma_v(t)=\mathrm{Exp}_{p_0}(tv), \|v\|=1$.

推论的证明如下：由推论 1.23 得出, 若 ε_0 充分小, 使得 $\mathrm{Exp}_{p_0}\colon B_{\varepsilon_0}(O)\to M^n$ 是嵌入, 则存在 $\widetilde{q}\in\partial B_{\varepsilon_0}(p_0)$ 满足

$$
d(p_0,q)=d(p_0,\widetilde{q})+d(\widetilde{q},q).
$$

令 $v=\dfrac{\mathrm{Exp}_{p_0}^{-1}\widetilde{q}}{\|\mathrm{Exp}_{p_0}^{-1}\widetilde{q}\|}, l=d(p_0,q)$ 我们将证明 $\sigma_v(l)=q$. 为达到这个目的, 我们考虑

$$
E=\{t|d(\sigma_v(t),p_0)=t,\quad d(p_0,\sigma_v(t))+d(\sigma_v(t),q)=d(p_0,q)\}.
$$

记 $t_0=\sup\{t|t\in E\}$. 如果 $t_0=l$, 则推论成立. 反之, $t_0<l$ 我将导出一个矛盾. 显然 $t_0\geqslant\varepsilon_0>0$.

因为 $t_0<l, q'=\sigma_v(t_0)\neq q$. 我们再应用推论 1.23 找出一个 $q''\in\partial B_\varepsilon(\sigma(t_0))$, 使得

$$
d(q',q'')+d(q'',q)=d(q',q).
$$

此等式和 E 的定义蕴含着

$$
\begin{aligned}
d(p_0,q) &= d(p_0,q') + d(q',q) \\
&= d(p_0,q') + d(q',q'') + d(q'',q) \\
&\geqslant d(p_0,q'') + d(q'',q).
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

因为 d 是距离函数, 所以三角不等式成立, 即有

$$
d(p_0,q) \leqslant d(p_0,q'') + d(q'',q). \tag{1.19}
$$

由 (1.18)~(1.19) 得出

$$
d(p_0,q) = d(p_0,q'') + d(q'',q) \tag{1.20}
$$

和

$$
d(p_0,q'') = d(p_0,q') + d(q',q''). \tag{1.21}
$$

令 ψ 是连 q' 到 q'' 的最短测地线, 则 $\sigma_v\Big|_{[0,t_0]}\bigcup\psi$ 必为一条最短线 (这是因为 (1.21))(图 8). 从而由测地线的唯一性, 我们推出

$$
\sigma_v(t_0+\varepsilon) = q''.
$$

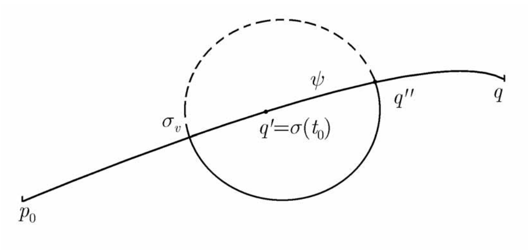


图 8

由 (1.20)~(1.21) 得出

$$
\begin{aligned}
&d(p_0,q) = d(p_0,\sigma_v(t_0+\varepsilon)) + d(\sigma_v(t_0+\varepsilon),q), \\
&d(p_0,\sigma(t_0+\varepsilon)) = t_0+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

从而 $t_0+\varepsilon\in E$, 矛盾. 推论 1.24 证毕.

有了推论 1.24, (b)⇒(a) 的证明就迎刃而解了.

设 $\{q_i\}$ 是 M^n 中的 Cauchy 序列, $l_i=d(p_0,q_i)$. 由推论 1.24 推出, 存在 $v_i\in S^{n-1}(1)$ 使得 $q_i=\mathrm{Exp}_{p_0}(l_iv_i)$ 取一子序列 $\{i_j\}$, 使

$$\begin{aligned} &l_{i_j}\to l_0,\\ &v_{i_j}\to v_0\in S^{n-1}(1)\end{aligned}$$

成立. 由 Exp_{p_0} 的连续性, 我们得出

$$q_{i_j}=\mathrm{Exp}_p(l_{i_j}v_{i_j})\to \mathrm{Exp}_{p_0}(l_0v_0)=q_0,$$

即 $\lim\limits_{j\to+\infty}d(q_{i_j},q_0)=0$. 再因 $\{q_i\}$ 是 Cauchy 序列也就有 $\lim\limits_{i\to+\infty}d(q_i,q_0)=0$, 从而 (M^n,d_g) 完备.

对 (a)⇒(c), 任何给定 $v\in S^{n-1}\subset T_pM^n$, 令 $\sigma_v(t)=\mathrm{Exp}_p(tv), t_0=\sup\{t|\mathrm{Exp}_p(tv)$ 有定义$\}$, 如果 $t_0<+\infty$, 我们导出矛盾. 取 $t_i\to t_0$, 则 $q_i=\mathrm{Exp}_p(t_iv)=\sigma_v(t_i)$, 满足

$$d(q_i,q_j)\leqslant|t_i-t_j|.$$

因为 $t_i\to t_0$, 从而 $\{q_i\}$ 是个 Cauchy 序列. 又因为 (M^n,d_q) 完备, 从而 $q_0=\lim\limits_{i\to+\infty}\sigma_v(t_i)$ 存在. 对 q_0 应用 Gauss 引理, 不难推出 $q_0=\sigma_v(t_0)$. 记 $w_0=\sigma_v'(t_0),\psi=\mathrm{Exp}_{q_0}(tw_0)$. 则 $\sigma_v\bigcup\psi$ 构成一条光滑测地线. 所以 $\sigma_v\Big|_{[0,t_0+\varepsilon]}$ 有定义, 矛盾.

(c)⇒(b), 显然. 证毕.

习 题 一

1. 假设 f: $M^n\to\mathbb{R}$ 是一个光滑流形上的光滑函数, g 是 M^n 上的一个 Riemann 度量, 假设 $\{(x_1,\cdots,x_i)\}$ 是 M^n 在 p 处附近的一个局部坐标系.

(i) 向量场 $\nabla f=\sum\limits_{i,j=1}^n g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 是否依赖于局部坐标系的选取? 这里 $(g^{ij}(x))$ 是矩阵 $(g_{ij}(x))$ 的逆矩阵且 $g_{ij}(x)=\left\langle\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_g\Big|_x$.

(ii) 全微分 $df=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$ 是否依赖局部坐标系的选取?

(iii) 定义 $df(X)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 对所有向量场 $X=\sum a_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 试找出 M^n 的一个向量场 Y 使得

$$df(X)=\langle X,Y\rangle_g$$

对所有向量场 X 成立.

(iv) 假设 $c>1$ 是个大于 1 的常数, 流形 $M^n=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R}\}$ 且 $f(x)=x_1$. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上两个不同的度量：$g=dx_1\otimes dx_1+\cdots+dx_n\otimes dx_n$ 和 $\hat{g}=c^2g$. 令 $\nabla f=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $\hat{\nabla} f=\sum_{i,j=1}^n \hat{g}^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. 问是否等式 $\nabla f=\hat{\nabla} f$ 成立?

2. 假设 f: $M^n\to\mathbb{R}$ 是个光滑函数, g 是 M^n 上的一个光滑 Riemann 度量, ∇ 是对应的 Riemann 联络. 令函数 f 的 Hessian 为

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\langle X,\nabla_Y(\nabla f)\rangle_g,$$

这里 ∇f 为 f 的梯度, $\nabla f=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 或 $df(X)=\langle\nabla f,X\rangle$(见题 1).

(i) 如果 h 是 M^n 的光滑函数, 下列等式

$$\mathrm{Hess}(f)(hX,Y)=h\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\mathrm{Hess}(f)(X,hY)$$

是否成立? 即 $\mathrm{Hess}(f)$ 是否为一个张量?

(ii) 根据定理 1.10, 下列等式是否成立?

$$\langle X,\nabla_Y(\nabla f)\rangle=YXf-(\nabla_YX)f.$$

(iii) 根据 (ii) 试证明

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\mathrm{Hess}(f)(Y,X),$$

这里 X 和 Y 为 M^n 上的任何一对向量场.

3. 假设 f: $M^n\to\mathbb{R}$, g 和 ∇ 如上. 令 $\Delta f=\mathrm{tr}[\mathrm{Hess}(f)]$, 这里 $\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\langle X,\nabla_Y\nabla f\rangle$, $\mathrm{tr}S$ 表示二次对称式 S 的迹.

(i) 如果 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 T_xM^n 的一组正交基, 则证明

$$(\mathrm{tr}S)\Big|_x=\sum_{i=1}^n S(e_i,e_i).$$

(ii) 对 M^n 上的任一个光滑向量场 Y, 我们定义相对于度量 g 的 Riemann 联络 ∇, 关于 Y 的散度为

$$\mathrm{div}Y=\mathrm{tr}(X\mapsto\nabla_XY).$$

在任何一个局部坐标系 $\{(x_1,\cdots,x_n)\}$ 内, 如果 $Y=\sum_{i=1}^n b_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 试计算 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}Y$ 和 $\mathrm{div}Y$.

(iii) 如果 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ 是相应的 Christoffell 记号, 则

$$\mathrm{div}Y=\sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial b_i}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^n\Gamma^i_{ki}b_k\right\}.$$

记 $G=\det(g_{ij})$, 证明

$$\sum_{i=1}^n\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{G}).$$

(iv) 等式

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f$$

是否成立?

(v) 用 $\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和上述 (iii)~(iv) 证明

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{G}\, g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

(vi) 试问 Laplace 算子 Δ 是否依赖于局部坐标系的选取?

4. 假设 η: $M^n \to \mathbb{R}$ 为 M^n 上正的光滑函数, g 是 M^n 上的一个光滑 Riemann 度量, $\hat{g}(X,Y) = \eta^2 g(X,Y)$, 即 $\langle X,Y\rangle_{\hat{g}} = \eta^2\langle X,Y\rangle_g$, 用题 3 找出 $\{(\hat{g}^{jk}),\hat{G},\hat{\Delta}\}$ 和 $\{(g^{ik}),G,\Delta\}$ 之间的关系.

如果 $n=2$, 是否有下列等式

$$\hat{\Delta} f = \frac{1}{\eta^2}\Delta f$$

成立?

5. 假设 σ_0 和 σ_1: $S^1 \to M^n$ 为 M^n 中的两条光滑闭曲线. 如果存在一个光滑映射 H: $S^1 \times [0,1] \to M^n$ 使得 $H(\cdot,0) = \sigma_0$ 和 $H(\cdot,1) = \sigma_1$, 则称两条曲线同伦. 此时如果 $\sigma_0(t) \equiv p_0$ 是 M^n 的点曲线, 则称 σ_1 为可收缩的.

(i) 考虑闭曲线空间 $C(S^1, M^n)$ 的一条连通分支, 令

$$\Omega_{[\sigma_0]} = \{\sigma\text{: } S^1 \to M^n \mid \sigma\text{同伦于闭曲线}\sigma_0\}$$

和

$$L(\sigma) = \int_{S^1}\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_g dt,$$

这里 $\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_g = \left\langle\frac{d\sigma}{dt},\frac{d\sigma}{dt}\right\rangle_g^{\frac{1}{2}}$, g 是 M^n 上的一个光滑度量. 假定 M^n 是个紧流形, 令

$$l_{[\sigma_0]} = \inf\left\{L(\sigma) \mid \sigma \in \Omega_{[\sigma_0]},\ \text{即 } \sigma \text{ 同伦于} \sigma_0\right\}.$$

试问：是否存在一条闭曲线 σ, 同伦于 σ_0 且使得 σ 的长度 $L(\sigma) = l_{[\sigma_0]}$? 即当 M^n 为紧时是否每个同伦类都存在一条最短闭曲线?

(ii) 取一序列闭曲线 $\{\sigma_j\}_{j=1}^{+\infty}$, σ_j 同伦于 σ_0 且 $L(\sigma_j) \to l_{[\sigma_0]}$. 如果 σ_j 都有常速度, 即 $\left\|\frac{d\sigma_j}{dt}\right\| \equiv c_j$ 对所有 $t \in S^1$ 成立, 问 $\{\sigma_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 是否构成一族

$$\sigma_j\text{: } S^1 \to M^n$$

等度连续映照?

(iii) 根据 Ascoli 等度函数引理, 当 M^n 紧时, 问是否存在一个子序列 $\{\sigma_{j_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ 收敛于一条闭曲线 σ_∞: $S^1 \to M^n$?

(iv) 假设 σ_∞: $S^1 \to M^n$ 如上, 请用第一变分公式证明极限曲线 σ_∞ 是一条闭测地线.

6. 假设 (M^n, g) 是紧 Riemann 流形且 M^n 中至少有一条不可收缩的闭曲线. 令

$$\mathrm{Sys}(M^n,\ g) = \inf\left\{L(\sigma) \mid \sigma \text{ 不可收缩}\right\},$$

这里 $L(\sigma)$ 是表示闭曲线 σ: $S^1 \to M^n$ 的长度.

(i) 设 a 和 b 都是正实数, $a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z} \text{ 是整数}\}$. 由参数 a 和 b 构成的平坦环面 $(T^2, g_{a,b}) = \mathbb{R}^2/a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. 计算 $\mathrm{Sys}(T^2, g_{a,b})$.

(ii) 计算 $(T^2, g_{a,b})$ 的面积.

(iii) 不等式

$$\mathrm{Area}(T^2,\ g_{a,b}) \geqslant [\mathrm{Sys}(T^2, g_{a,b})]^2$$

是否正确?

7. 考虑 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $S^2(1) = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$和实投影面$\mathbb{R}P^2 = S^2(1)/\mathbb{Z}_2$, 这里 $\mathbb{Z}_2$ 是由对径映射

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$v \to -v$$

张成的二元群.

(i) 计算 $\mathrm{Sys}(\mathbb{R}P^2)$.

(ii) 不等式

$$\mathrm{Area}(\mathbb{R}P^2) \geqslant \frac{2}{\pi}[\mathrm{Sys}(\mathbb{R}P^2)]^2$$

是否成立?(在 1962 年中国数学家蒲葆明证明了对实投影空间 $\mathbb{R}P^2$ 上任何度量 g 都有不等式

$$\mathrm{Area}(\mathbb{R}P^2,\ g) \geqslant \frac{2}{\pi}[\mathrm{Sys}(\mathbb{R}P^2, g)]^2,$$

而且等式成立时当且仅当 g 是上述经典度量乘上一个常数因子, 见 [Pu]. Gromov 在 1983 年将蒲葆明定理推广于高维空间, 见 [Gr2].)

8. 假设 (M^n, g) 是个完备度量, $C(M^n)$ 为 M^n 上连续函数的空间. 当 M^n 为紧时, 定义

$$\|f\| = \max_{x\in M^n} |f(x)|.$$

Gromov 考虑如下嵌入:

$$\Phi\colon (M^n, g) \to C(M^n),$$

$$x \to d_x,$$

这里 $d_x(p) = d(x, p)$ 为 (M^n, g) 上的距离函数.

(i) 用三角不等式 $|d(x,z)-d(y,z)| \leqslant d(x,y)$ 证明

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\| = d(x,\ y),$$

从而 Φ 是保距离的嵌入.

(ii) 令 Ψ: $(M^n, g) \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 为定理 1.9 给出的 Nash 嵌入. 举例说明有时 Nash 嵌入 Ψ 不一定是保距离的. (提示：比较 $\mathbb{R}^m$ 中的直线和 M^n 中的测地线.)

9. 假设 (M^n, g) 是个完备的 Riemann 流形, p_0 是 M^n 上固定的一点, $f(x) = d(x, p_0)$. 再假设 f 在一个开集 U 中光滑, 试计算 $\|\nabla f(x)\|$, 这里 $x \in U$. 反之, 如果 h: $M^n \to \mathbb{R}$ 是个光滑函数满足 $\|\nabla h\| \equiv 1$, 且如果 σ: $\mathbb{R} \to M^n$ 是 ∇h 的一条积分曲线, 即 $\dfrac{d\sigma}{dt} = \nabla h|_{\sigma(t)}$, 试问 σ 是否是一条 (M^n, g) 的测地线?

10. 设 $(\overline{M}^m, \overline{g})$ 是个完备的 Riemann 流形, $M^n \subset \overline{M}^m$ 为 $\overline{M}^m$ 中的光滑子流形. 假定 $\overline{\nabla}$ 是 $(\overline{M}^m, \overline{g})$ 的 Riemann 联络. 对 M^n 中的每一点 p, 切空间 $T_p\overline{M}^m = T_pM^n \oplus N_pM^n$ 有个自然分解, 这里 $N_pM^n = \left\{v \in T_p\overline{M}^m \mid v \perp T_pM^n\right\}$ 是 T_pM^n 在 $T_p\overline{M}^m$ 中的正交补空间, 即 N_pM^n 是 M^n 在 $\overline{M}^m$ 中于 p 点的法空间. 对 M^n 上的任何两个切向量场 X 和 Y 令

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

这里 $(\cdot)^T$ 是向量 $(\cdot)$ 的切分量. 问 ∇ 是否是由诱导度量 $g = \overline{g}|_{TM^n}$ 决定的 Riemann 联络? (提示：考虑应用定理 1.10.)

第二章　曲率和比较定理

在这一章里, 我们将引进曲率张量, 讨论测地线的变分和曲率之间的关系. 测地线族的变分向量场就是我们将要讨论的 Jacobi 场. 估计 Jacobi 场的长度是 Riemann 几何的一个重要组成部分. 著名几何学家 Cheeger 和 Ebin 曾经专门写了一本这方面的专著《Riemann 几何中的比较定理》(参阅 [ChE]). 我们在本章中给出的关于比较定理的证明比较新颖简单.

§2.1　曲率张量、截面曲率和 Ricci 曲率

如果 (M^n, g) 是个 Riemann 流形, ∇ 是相应的 Riemann 联络, 则我们定义其曲率张量为

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

这里 X, Y 和 Z 为 M^n 上的向量场.

Riemann 曲率张量 R 具有很多重要性质, 其中突出的性质包括下述的命题.

命题 2.1　对 M^n 上任何光滑函数 $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ 和任何三个切向量场 X、Y、Z, 我们都有

(1) $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ)$,

(2) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(4) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

证明　关于 (1), 我们首先证明

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

事实上, Riemann 联络是无挠联络, 因此我们有 $YXf - XYf = -[X,Y]f$ 和 $(\nabla_Y X)f - (\nabla_X Y)f = -[X,Y]f$, 从而

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) =& -\nabla_X\nabla_Y(fZ) + \nabla_Y\nabla_X(fZ) + \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\ =& fR(X,Y)Z - (XYf)Z + (YXf)Z + [X,Y]f \\ =& fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

(1) 中的其他等式和 (2) 由定义直接推出. 关于 (3), 我们首先有关于李括号乘积的 Bianchi 等式再应用联络 ∇ 的无挠性可推出. 其实 (3) 的左边是个张量, 所以我们只需证明 (3) 式当 $X=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $Z=\frac{\partial}{\partial x_k}$ 时成立. 更详细地, 我们得出

$$\begin{aligned}
(3)\text{ 的左边} = &-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}+\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_k}\\
&-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_i}+\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}+\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j}\\
=&\,0 \qquad (\text{因为 } \tau_\nabla\equiv 0).
\end{aligned}$$

等式 (4) 的证明稍为复杂, 请参考其他书 (如 [ChC] p141～155). 因为我们不会在后面的内容中经常使用 (4), 鉴于篇幅关系我们省去 (4) 的证明. 证毕.

设 $X,Y\in T_pM^n$ 为两个线性无关的向量, 我们考虑由 X,Y 张成的平面

$$\mathbb{P}=\mathrm{Span}\{X,Y\}.$$

则 (M^n,g) 在 $\mathbb{P}\subset T_pM$ 的截面曲率为

$$K(\mathbb{P})=K_{XY}=\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{\begin{vmatrix}\langle X,X\rangle & \langle X,Y\rangle\\ \langle X,Y\rangle & \langle Y,Y\rangle\end{vmatrix}}.$$

用命题 2.1 可证明 $\mathbb{P}$ 的截面曲率 $K(\mathbb{P})$ 不依赖它的基 $\{X,Y\}$ 的选取. 为了讨论 Ricci 曲率, 我们取 T_pM^n 中的一组正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$. 则

$$\mathrm{Ric}(X,X)=\sum_{i=1}^n\langle R(X,e_i)X,e_i\rangle.$$

我们从下节开始讨论测地线和曲率之间的关系.

§2.2　测地线族的变分向量场

假设 $\{\beta_s(\cdot)\}_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 是光滑 Riemann 流形 (M^n,g) 中的一族测地线, 这里 $\beta_s(t)=\beta(t,s)$,

$$\beta\text{：}\ [a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M^n,$$

$$(t,s)\to\beta(t,s).$$

对每一固定的 s, 曲线 β_s：$t\to\beta(t,s)$ 是 (M^n,g) 中的测地线, 此时我们称 $\{\beta(\cdot,s)\}$ 是 (M^n,g) 中一族单参数测地线.

定义 2.2 设 σ：$[a,b]\to M^n$ 是 (M^n,g) 中的一条测地线, $\{\beta(\cdot,s)\}_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 为一族单参数测地线, $\beta(t,0)=\sigma(t)$ 及 $J(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial s}(t,0)$, 则 $\{J(t)\}$ 称为 σ 上的一个 Jacobi 场.

下面的命题把测地线的变分向量场 J 和曲率张量紧密地联系在一起.

命题 2.3 设 $\{J(t)\}_{t\in[a,b]}$ 是沿测地线 σ：$[a,b]\to M^n$ 的一个 Jacobi 场, 则 J 满足下列 Jacobi 方程

$$J''(t)+R(\sigma'(t),J(t))\sigma'(t)=0. \tag{2.1}$$

证明 注意到我们的联络是无挠的，所以

$$\begin{aligned}0&=\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial s}-\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\frac{\partial\beta}{\partial t}-\left[\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial s}\right]\\&=\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial s}-\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\frac{\partial\beta}{\partial t},\end{aligned}$$

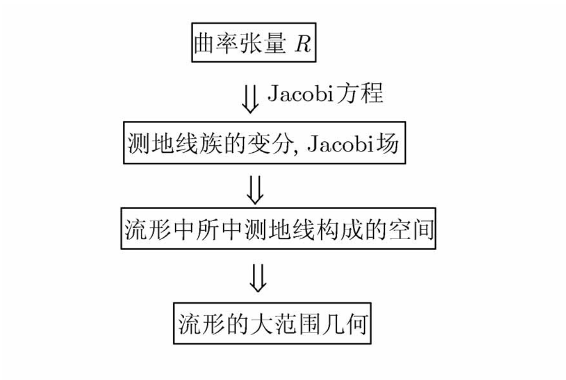
这里 $\{\beta(\cdot,s)\}$ 是一族测地线，$\beta(t,0)=\sigma(t)$, $J(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial s}(t,0)$ $\left(这里我们用了一个等式\left[\dfrac{\partial\beta}{\partial t},\dfrac{\partial\beta}{\partial s}\right]=\beta_*\left[\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial s}\right]=0\right)$, 从而 $\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\dfrac{\partial\beta}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\dfrac{\partial\beta}{\partial s}$.

当 $s=0$ 时，我们观察到

$$\begin{aligned}R(\sigma',J)\sigma'&=R\left(\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\frac{\partial\beta}{\partial t}\\&=-\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\nabla_{[\frac{\partial\beta}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial s}]}\frac{\partial\beta}{\partial t}\\&=-\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial s}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\\&=-\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\frac{\partial\beta}{\partial s}\\&=-\nabla_{\sigma'}\nabla_{\sigma'}J=-J''(t).\end{aligned}$$

这里我们用了下列事实：因每个 $\beta(\cdot,s)$ 是测地线, 所以 $\nabla_{\frac{\partial\beta}{\partial t}}\dfrac{\partial\beta}{\partial t}\equiv0$. 最后由上述等式推出 Jacobi 方程 (2.1). 证毕.

今后我们讨论的思路为：



§2.3　Jacobi 方程和 Riccati 方程

我们在本节继续讨论测地线上 Jacobi 场的几何性质, 先看看下列例子.

例　假设 (M^2, g_1) 为 $(\mathbb{R}^3, g_0)$ 中的单位球面

$$S^2(1) = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

单位球面具有常曲率 $K \equiv 1$. 我们已知

$$\begin{aligned}\sigma：\quad & [0, 2\pi] \to S^2(1),\\ & t \to (\text{cos}t, \text{sin}t, 0)\end{aligned}$$

是一条测地线, $J(t) = (0, 0, c_1\text{cos}t + c_2\text{sin}t)$ 是 σ 上的 Jacobi 场, 这里 c_1 和 c_2 都是常数.

设 $\{J_1, \cdots, J_{n-1}\}$ 为垂直于 σ' 且线性无关的 $(n-1)$ 个 Jacobi 场, $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是沿 σ 的一组平行正交基使得 $E_n(t) = \sigma'(t)$. 在这种情况下. 我们有

$$J_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}(t)E_j(t), \quad R_{ij}(t) = \langle R(\sigma', E_i)\sigma', E_j\rangle.$$

因为 $J_i'' + R(\sigma', J_i)\sigma' = 0$, 所以矩阵值函数

$$A(t) = (a_{ij}(t))$$

满足

$$A''(t) + R(t)A(t) = 0, \tag{2.2}$$

这里 $R(t) = (R_{ij}(t))$ 是曲率张量矩阵.

因 $\{J_1,\cdots,J_{n-1}\}$ 线性无关, 故 $A^{-1}(t)$ 存在. 令 $\mathrm{II}(t)=A'(t)A^{-1}(t)$. 应用 (2.2) 我们导出

$$\begin{aligned}\mathrm{II}'(t)&=[A'(t)A^{-1}(t)]'\\&=A''A^{-1}+A'(A^{-1})'\\&=-RAA^{-1}-A'A^{-1}A'A^{-1}\\&=-R-\mathrm{II}^2.\end{aligned}$$

最后我们得到

$$\mathrm{II}'+\mathrm{II}^2+R=0. \tag{2.3}$$

这个方程称为 Riccati 方程. 在下面讨论 Gromov-Bishop 比较定理时我们会用到 Riccati 方程. 其实导出曲率有下界流形的比较定理时, 常常要用到 Riccati 方程或 Riccati 不等式. 请见下面的 §2.4 和 §2.5.

§2.4 Gromov 引理和经典比较定理的新证明

在本节中将用新的方法证明一些比较定理. 新的证明方法基于下面的简单事实.

引理 2.4A (Gromov) 如果 f 和 $\tilde f$ 分别满足

$$\begin{cases}f''+Kf\geqslant 0,\\ \tilde f''+\tilde K\tilde f\leqslant 0,\end{cases}$$

且 $K(t)\leqslant\tilde K(t)$. $f'(0)\tilde f(0)\geqslant\tilde f'(0)f(0),\tilde f(t),f(t)\geqslant 0$, 则当 $f(t)>0$ 时 $\dfrac{\tilde f(t)}{f(t)}$ 关于 t 是递减函数.

证明 $\left(\dfrac{\tilde f}{f}\right)'=\dfrac{\tilde f'f-f'\tilde f}{f^2}$, 令 $h(t)=\tilde f'f-f'\tilde f$,

$$\begin{aligned}h'=(\tilde f'f-f'\tilde f)'&=\tilde f''f-f''\tilde f\\&\leqslant-\tilde K\tilde ff+Kf\tilde f\\&=(K-\tilde K)f\tilde f\leqslant 0.\end{aligned}$$

由初始条件 $h(0)=f'(0)\tilde f(0)-\tilde f'(0)f(0)\leqslant 0$, 我们推出 $h(t)\leqslant 0$, 从而

$$\left(\frac{\tilde f}{f}\right)'=\frac{h}{f^2}\leqslant 0,$$

因此 $\dfrac{\tilde f(t)}{f(t)}$ 是递减函数. 证毕.

我们首先介绍曲率有上界流形 ($K_{M^n} \leqslant c$) 的比较定理.

定理 2.5(第一比较定理, Rauch) 设 (M^n, g) 是完备的Riemann流形, σ: $[0,+\infty) \to M^n$ 是条测地线, $\{J(t)\}$ 是 σ 上的 Jacobi 场满足 $J(0)=0, \langle J'(0), \sigma'(0)\rangle = 0$, $\|J'(0)\| = 1 = \|\sigma'\|$. 则下列结论成立.

(i) 若 $K_{M^n} \leqslant 0$, 则 $\|J(t)\| \geqslant t$;

(ii) 若 $K_{M^n} \leqslant -1$, 则 $\|J(t)\| \geqslant \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$;

(iii) 若 $K_{M^n} \leqslant 1, t \in [0, \pi]$, 则 $\|J(t)\| \geqslant \sin t$.

证明 令 $f(t) = \|J(t)\|$, 我们观察到

$$f'(t) = \|J(t)\|' = [\langle J(t), J(t)\rangle^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}\frac{2\langle J, J'\rangle}{\langle J, J\rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{\langle J, J'\rangle}{\|J\|},$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f'(t))' = \left(\frac{\langle J, J'\rangle}{\|J\|}\right)' = \frac{\langle J, J'\rangle'\|J\| - \langle J, J'\rangle\|J\|'}{\|J\|^2} \\ &= \frac{\|J\|(\langle J', J'\rangle + \langle J, J''\rangle) - \langle J, J'\rangle\dfrac{\langle J, J'\rangle}{\|J\|}}{\|J\|^2} \\ &= \frac{-\langle J, R(\sigma', J)\sigma'\rangle\|J\| + \left(\|J\|\langle J', J'\rangle - \dfrac{\langle J, J'\rangle^2}{\|J\|}\right)}{\|J\|^2} \\ &= -K(t)\|J\| + \frac{1}{\|J\|^3}(\|J\|^2\|J'\|^2 - \langle J, J'\rangle^2) \\ &\geqslant -K(t)f(t), \end{aligned}$$

这里 $K(t) = \dfrac{\langle R(\sigma', J)\sigma', J\rangle}{\|J\|^2}, \langle J(t), \sigma'(t)\rangle \equiv 0, \|\sigma'\| = 1$, 从而函数 $f(t) = \|J(t)\|$ 满足微分不等式

$$f'' + Kf \geqslant 0.$$

(因 $\langle J(0), \sigma'(0)\rangle = 0 = \langle J'(0), \sigma'(0)\rangle$, 故$\langle J(t), \sigma'(t)\rangle \equiv 0$.)

(i) 当 $K_{M^n} \leqslant 0$ 时, 我们再令 $\tilde{K}(t) \equiv 0, \tilde{f}(t) = t$. 用引理 2.4A 得

$$\frac{\tilde{f}(t)}{f(t)} = \frac{t}{f(t)}$$

是个递减函数, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|J(t)\|}{t}\\&=\lim_{t\to 0^+}\left\langle\frac{J(t)}{t},\frac{J(t)}{t}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\\&=\|J'(0)\|=1.\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{f(t)}{t}$ 是个递增函数, 所以得

$$\frac{f(t)}{t}\geqslant 1$$

对任意 $t\geqslant 0$ 成立, 即 $f(t)\geqslant t$.

结论 (ii)~(iii) 的证明类似, 故省去. 证毕.

我们上面新的证明方法也用于其他比较定理的导出.

定理 2.6(第二比较定理, Berger) 设(M^n,g)是完备的 Riemann 流形, σ: $[0,+\infty)\to M^n$ 是条测地线, $\{J(t)\}$ 是 σ 上的 Jacobi 场满足 $\|J'(0)\|=0=\langle J(0),\sigma'(0)\rangle$, $\|J(0)\|=1=\|\sigma'\|$. 则下列结论成立:

(i) 当 $K_{M^n}\leqslant 0$ 时, 则 $\|J(t)\|\geqslant 1$;

(ii) 当 $K_{M^n}\leqslant -1$ 时, 则 $\|J(t)\|\geqslant \cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$;

(iii) 当 $K_{M^n}\leqslant 1$ 时, 则 $\|J(t)\|\geqslant \cos t$.

证明 Berger 比较定理的证明方法和我们关于 Rauch 比较定理的新证明大同小异, 这里不赘述了. 证毕.

下面我们考虑曲率有下界的情形 ($\tilde{K}_{M^n}\geqslant c$). 当 $\tilde{K}_{M^n}\geqslant c$ 时, 有关比较定理的证明要用到 Riccati 方程和对称矩阵值的比较. 首先我们注意到 Riccati 方程等价于 Jacobi 方程. 因此, 我们将引理 2.4 A 及其证明重新表达为如下形式.

引理 2.4B 令 $f,\tilde{f},K$ 和 $\tilde{K}$ 如引理 2.4A. 再假设 $\lambda=(\log f)'$ 和 $\tilde{\lambda}=(\log\tilde{f})'$ 且有

$$\begin{cases}\lambda'+\lambda^2+K\geqslant 0,\\ \tilde{\lambda}'+\tilde{\lambda}^2+\tilde{K}\leqslant 0,\end{cases}$$

并设 $\tilde{\lambda}(0)\leqslant\lambda(0)$, 则我们必有

$$\tilde{\lambda}(t)\leqslant\lambda(t).$$

有了引理 2.4B, 我们讨论关于第二基本形式 $\mathrm{II}(t)$ 的比较.

推论 2.7　假设 $\{\tilde{S}(t)\}_{t>0}$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 对称矩阵值的光滑函数, 且

$$\tilde{S}'(t)+\tilde{S}^2(t)\leqslant -cI,$$

这里 I 表示单位矩阵. 则我们必有

$$\tilde{S}(t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{t}I, & \text{如果 } c=0,\\ (\cot t)I, & \text{如果 } c=1, t\in(0,\pi),\\ (\coth t)I, & \text{如果 } c=-1.\end{cases}$$

证明　令 $\{\tilde{\lambda}_1(t),\cdots,\tilde{\lambda}_{n-1}(t))\}$ 是 $\tilde{S}(t)$ 的特征值. 如果 $\tilde{S}(t)$ 光滑正定对称, 则 $\tilde{\lambda}_i(t)$ 光滑且令

$$\tilde{\lambda}(t)=\max\{\tilde{\lambda}_1(t),\cdots,\tilde{\lambda}_{n-1}(t)\}.$$

显然地, $\tilde{\lambda}(t)$ 是 Lipschitz 函数, 从而几乎处处可微. 我们证明

$$\tilde{\lambda}'+\tilde{\lambda}^2+c\leqslant 0$$

几乎处处成立.

假设 $\tilde{\lambda}(t)$ 在 t_0 处可微, $E(t_0)$ 是 $\tilde{S}(t_0)$ 以 $\tilde{\lambda}(t_0)$ 为特征值的特征向量, $\|E(t_0)\|=1$. 取 $\varphi(t)=\langle E(t_0),\ \tilde{S}(t)E(t_0)\rangle$. 则 $\varphi(t)\leqslant\tilde{\lambda}(t)$ 对所有 $t\geqslant 0$ 成立且有 $\varphi(t_0)=\tilde{\lambda}(t_0)$. 因为 φ 和 $\tilde{\lambda}$ 都在 t_0 处可微, 由 $\begin{cases}\varphi(t)\leqslant\tilde{\lambda}(t),\\ \varphi(t_0)=\tilde{\lambda}(t_0)\end{cases}$ 导出 $\varphi'(t_0)=\tilde{\lambda}'(t_0)$. 最后我们推出

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}'(t_0)+\tilde{\lambda}^2(t_0)&=\varphi'(t_0)+\varphi^2(t_0)\\&=\langle E(t_0),(\tilde{S}'(t_0)+\tilde{S}^2(t_0))E(t_0)\rangle\\&\leqslant -c\end{aligned}$$

对所有可微点 t_0 成立. 容易验证引理 2.4B 中的初值条件满足, 从而可利用引理 2.4B 得出本推论成立. 证毕.

定理 2.8 ($\tilde{K}_{M^n}\geqslant c$ 的比较定理)　假设 (M^n,g) 是一曲率有下界 $(\tilde{K}_{M^n}\geqslant c)$ 的完备 Riemann 流形, σ: $[0,+\infty)\to M^n$ 是一条具有单位速度的测地线, $\{\tilde{J}(t)\}$ 是 σ 上的 Jacobi 场且满足 $\tilde{J}(0)=0,\langle\tilde{J}'(0),\sigma'(0)\rangle=0,\|\tilde{J}'(0)\|=1$. 则

$$\|\tilde{J}(t)\|\leqslant\begin{cases}t, & \text{如果 } c=0,\\ \sin t, & \text{如果 } c=1,\\ \sinh t, & \text{如果 } c=-1.\end{cases}$$

证明 我们看到

$$(\log\|\tilde{J}\|)' = \left\langle \frac{\tilde{J}(t)}{\|\tilde{J}(t)\|}, \frac{\tilde{J}'(t)}{\|\tilde{J}(t)\|} \right\rangle.$$

取沿着 σ 平行的单位正交基 $\{\tilde{E}_1(t), \cdots, \tilde{E}_n(t)\}$ 使得 $E_n(t) = \sigma'(t), E_1(0) = \tilde{J}'(0)$. 令 $\tilde{J}_1(t), \cdots, \tilde{J}_{n-1}(t)$ 为沿着 σ 的 Jacobi 场, 且均垂直于 σ', 使得

$$\tilde{J}_i(0) = 0, \quad \tilde{J}_i'(0) = E_i(0), \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

则

$$\tilde{J}_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ji}(t)\tilde{E}_j(t), \tilde{R}_{ij} = \langle R(\sigma', \tilde{E}_i)\sigma', \tilde{E}_j\rangle.$$

记 $\tilde{A}(t) = (\tilde{a}_{ij}(t)), \tilde{\Pi}(t) = \tilde{A}'(t)\tilde{A}^{-1}(t), \tilde{R}(t) = (\tilde{R}_{ij}(t)), J(t) = (\tilde{J}_1(t), \cdots, \tilde{J}_{n-1}(t))$, $\tilde{E}(t) = (\tilde{E}_1(t), \cdots, E_{n-1}(t))$. 则我们必有 $J(t) = \tilde{A}(t)\tilde{E}(t)$, 从而

$$(\log\|J(t)\|)' = \left\langle \frac{J(t)}{\|J(t)\|}, \frac{J'(t)}{\|J(t)\|} \right\rangle = \left\langle \frac{J(t)}{\|J(t)\|}, \tilde{\Pi}(t)\frac{J(t)}{\|J(t)\|} \right\rangle.$$

因为 $\tilde{K}_{M^n} \geqslant c$, 我们必有

$$\tilde{\Pi}'(t) + \tilde{\Pi}^2(t) + cI \leqslant \tilde{\Pi}'(t) + \tilde{\Pi}^2(t) + \tilde{R}(t) = 0,$$

即

$$\tilde{\Pi}'(t) + \tilde{\Pi}^2(t) \leqslant -cI.$$

由推论 2.7 得出 (令 $\tilde{S}(t) = \tilde{\Pi}(t)$)

$$(\log\|J\|)' \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & \text{如果 } c = 0, \\ \cot t, & \text{如果 } c = 1, 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ \coth t, & \text{如果 } c = -1. \end{cases}$$

因而定理 2.8 得证. 证毕.

在下节我们讨论 $\mathrm{Ric}_{M^n} \geqslant -(n-1)c$ 的流形.

§2.5 Gromov-Bishop 比较定理

Gromov-Bishop 比较定理主要是关于体积的比较. 设 (M^n, g) 是完备的 Riemann 流形, 令

$$B_r(p) = \{q \in M^n | d(p, q) < r\},$$

$$S_r(p) = \{q \in M^n | d(p, q) = r\},$$

$$B_r^0(O) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < r\}.$$

最初 Bishop 在 1964 年证明了：如果 $\mathrm{Ric}_M \geqslant 0$, 则

$$\mathrm{vol}_n[B_r(p)] \leqslant \mathrm{vol}_n[B_r^0(O)] \tag{2.4}$$

对所有 $r \geqslant 0$ 成立. Gromov 的新贡献在于他观察到此时

$$\frac{\mathrm{Area}(\partial B_r(p))}{\mathrm{Area}(\partial B_r^0(O))} \tag{2.5}$$

是个递减函数, 并且对体积元素的比较也更精细了. 他的讨论和共轭点、单一半径等都无关, 十分大胆. 我们将会看到 Gromov 这些新的改进不仅蕴含了 Bishop 的结果 (2.4), 而且有了更广泛的应用.

例如用 (2.5), 人们可以简单地推出 Calabi-Yau 的一个定理："如 (M^n, g) 是个非紧完备 Riemann 流形满足 $\mathrm{Ric}_M \geqslant 0$, 则对任何 $p \in M^n$, 存在 $c = c_1 > 0$ 使得

$$\mathrm{vol}_n(B_r(p)) \geqslant cr$$

对所有 $r \geqslant 0$ 成立." 在第三章中我们还要用 Gromov-Bishop 比较定理证明最大直径定理.

为了叙述 Gromov-Bishop 比较定理, 我们需要引进一些必要的符号. 设 $\{(r, \Theta)\}_{\substack{r \geqslant 0 \\ \Theta \in S^{n-1}(1)}}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的极坐标,

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_p\text{：}\quad & \mathbb{R}^n \to M^n, \\ & (r, \Theta) \to \mathrm{Exp}_p(r\Theta). \end{aligned}$$

为了计算 (M^n, g) 在 $\mathrm{Exp}_p(r\Theta)$ 处的体积元素和 $\partial B_r(p)$ 的面积元素, 我们取 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\} \subset T_\Theta(S^{n-1}(1))$ 为一组正交基, 这里 $\Theta \in S^{n-1}(1)$. 令 $\sigma_\Theta(t) = \mathrm{Exp}_p(t\Theta)$. 在 σ_Θ 上考虑一组 Jacobi 场

$$J_i(t, \Theta) = (\mathrm{Exp}_p)_*|_{t\Theta}(te_i).$$

定义

$$g_{ij}(t,\Theta)=\langle J_i(t,\Theta),J_j(t,\Theta)\rangle,$$

$$\varphi(t,\Theta)=\sqrt{\det(g_{ij}(t,\Theta))},$$

则

$$dA_{\partial B_r(p)}=\varphi(r,\Theta)d\Theta,$$

$$d\mathrm{vol}_{(M^n,g)}=\varphi(r,\Theta)drd\Theta,$$

这里 $d\Theta$ 是单位球面 $S^{n-1}(1)$ 的单位面积元.

显然

$$\mathrm{Area}(\partial B_r(p))=\int_{\Theta\in S^{n-1}(1)}\varphi(r,\Theta)d\Theta,$$

$$\mathrm{vol}_n(B_r(p))=\int_0^r\int_{\Theta\in S^{n-1}(1)}\varphi(t,\Theta)d\Theta dt.$$

因此, 对体积元的系数 $\varphi(t,\Theta)$ 的估计至关重要.

定理 2.9 (Gromov-Bishop, 系数比较) 设 (M^n,g) 是完备的 Riemann 流形, $p\in M^n$, $\{(r,\Theta)\}$ 为 M^n 在 p 处的测地极坐标, $d\mathrm{vol}_{(M^n,g)}=\varphi(r,\Theta)drd\Theta$ 和 $dA_{\partial B_{r(p)}}=\varphi(r,\Theta)d\Theta$ 如上, 这里 $d\Theta$ 是 $S^{n-1}(1)$ 的标准体积元素, 则下列结论成立:

(i) 如 $\mathrm{Ric}_M\geqslant 0$, 则 $\dfrac{\varphi(t,\Theta)}{t^{n-1}}$ 是递减函数, 等式 $\varphi(t,\Theta)\equiv t^{n-1}$ 对所有 $\Theta\in S^{n-1}(1),t\in[0,t_0]$ 当且仅当 $B_{t_0}(p)$ 等距于 $B^0_{t_0}(O)$;

(ii) 如 $\mathrm{Ric}_M\geqslant n-1,t\in[0,\pi]$, 则 $\dfrac{\varphi(t,\Theta)}{(\sin t)^{n-1}}$ 是递减函数, 等式 $\varphi(t,\Theta)\equiv(\sin t)^{n-1}$ 对 $\forall\Theta\in S^{n-1}(1)$ 和 $t\in[0,\pi]$ 成立当且仅当 (M^n,g) 等距于 $S^n(1)\hookrightarrow(\mathbb{R}^{n+1},g_0)$;

(iii) 如 $\mathrm{Ric}_M\geqslant-(n-1)$, 则 $\dfrac{\varphi(t,\Theta)}{(\sinh t)^{n-1}}$ 是个递减函数.

证明 令 $\{E_1(t),\cdots,E_{n-1}(t)\}$ 为 σ_Θ 上的垂直于 σ' 的平行正交单位向场量, 设 $J_i(t)=(\mathrm{Exp}_p)_*|_{t\Theta}(te_i)$ 如上, 且有

$$J_i(t)=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ji}(t)E_j,$$

$$R_{ij}(t)=\langle R(\sigma',E_i)\sigma',E_j\rangle.$$

则 $\mathrm{Ric}(\sigma',\sigma')=\sum\limits_{i=1}^{n-1}R_{ii}(t)$. 令

$$A(t)=(a_{ij}),$$

$$R(t)=(R_{ij}(t)).$$

由 Jacobi 方程

$$J_i'' + R(\sigma', J_i)\sigma' = 0,$$

得出

$$A'' + RA = 0. \tag{2.6}$$

由矩阵 $A(t)$ 的定义, 我们有

$$\varphi(t, \Theta) = \det A(t).$$

(i) 当 $\mathrm{tr}(R) = \mathrm{Ric}(\sigma', \sigma') \geqslant 0$ 时, 我们只需证

$$\frac{\det A(t)}{t^{n-1}}$$

是个递减函数. 为此只需证 $\dfrac{[\det A(t)]^{\frac{1}{n-1}}}{t}$ 是递减的.

令 $\Psi(t) = [\det A(t)]^{\frac{1}{n-1}}$. 我们发现

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \frac{1}{n-1}[\det A(t)]^{\frac{1}{n-1}-1}\mathrm{tr}(A'A^{-1})\det(A) \\ &= \frac{1}{n-1}[\det A(t)]^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{tr}(A'A^{-1}) \\ &= \frac{1}{n-1}\Psi(t)\mathrm{tr}(A'A^{-1}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

再令 $\mathrm{II}(t) = A'A^{-1}$, 由 (2.6) 得出 Riccati 方程：

$$\mathrm{II}' + \mathrm{II}^2 + R = 0.$$

所以当 $\mathrm{tr}(R) = \mathrm{Ric}(\sigma', \sigma') \geqslant 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{II}') &= -\mathrm{tr}(\mathrm{II}^2) - \mathrm{tr}(R) \\ &\leqslant -\mathrm{tr}(\mathrm{II}^2). \end{aligned} \tag{2.8}$$

对 (2.7) 继续求导得

$$\begin{aligned} \Psi''(t) &= \left[\frac{1}{n-1}\Psi(t)\mathrm{tr}(A'A^{-1})\right]' \\ &= \frac{1}{n-1}[\Psi'(t)\mathrm{tr}(\mathrm{II}) + \Psi(t)\mathrm{tr}(\mathrm{II}')] \\ &\leqslant \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n-1}\Psi(t)(\mathrm{tr}(\mathrm{II}))^2 - \Psi(t)\mathrm{tr}(\mathrm{II}^2)\right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

因为 $\mathrm{II}(t)$ 是 $\partial B_t(p)$ 的第一基本形式的矩阵表示, 所以 $\mathrm{II}(t)$ 可以对角化, 记它的特征值为

$$\lambda_1(t),\cdots,\lambda_{n-1}(t),$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}[\mathrm{tr}(\mathrm{II}(t))]^2 &= (\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})^2\frac{1}{n-1}\\ &\leqslant \lambda_1^2+\cdots+\lambda_{n-1}^2\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{II}^2),\end{aligned}$$

从而因 (2.9) 导出

$$\Psi''(t)\leqslant 0.$$

自然地

$$\left(\frac{\Psi(t)}{t}\right)'=\frac{\Psi'(t)t-\Psi(t)}{t^2},$$

注意到

$$\begin{aligned}&[\Psi'(t)t-\Psi(t)]'\\ =&\Psi''(t)t+\Psi'(t)-\Psi'(t)\\ =&t\Psi''(t)\leqslant 0,\end{aligned}$$

$\Psi'(0)\cdot 0-\Psi(0)=0$, 我们得

$$\Psi'(t)t-\Psi(t)\leqslant 0,$$

更有

$$\left(\frac{\Psi(t)}{t}\right)'\leqslant 0,$$

从而 $\dfrac{\Psi(t)}{t}$ 是个递减函数, 也就是说 $\dfrac{\varphi(t,\Theta)}{t^{n-1}}$ 递减.

如果等式 $\varphi(t,\Theta)\equiv t^{n-1}$ 对所有 $t\in[0,t_0]$ 和 $\Theta\in S^{n-1}(1)$ 成立, 在上述证明中就有

$$\begin{cases}\lambda_1(t)=\cdots=\lambda_{n-1}(t),\\ R(t)\equiv 0,\end{cases}$$

从而得出 $\mathrm{II}(t)=\dfrac{1}{t}I,\ A(t)=tI$, 这里 I 为恒等矩阵. 我们的度量 g 就可写成

$$g=dt^2+t^2d\Theta^2.$$

当 $t\in[0,t_0]$ 时, 这个度量 g 就是欧氏平坦度量, 从而 $B_{t_0}(p)$ 等距于 $B^0_{t_0}(O)$. 结论 (i) 成立.

结论 (ii) 和 (iii) 的证明与上述结论 (i) 的证明很相似, 这里因篇幅关系就此省略. 证毕.

习　题　二

1 (计算旋转对称曲面的曲率). 假设 $\{(t,\theta)\}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 或柱面的一个局部坐标. 考虑 Riemann 度量 $g=dt^2+f^2(t)d\theta^2$.

(i) 固定任何 $\varepsilon=\theta_0$, 令 $\sigma_\varepsilon(t)=(t,\varepsilon)$. 问 σ_ε: $\mathbb{R}\to M^2$ 是否是一条测地线?(提示：证明 $d(\sigma_\varepsilon(t_1),\sigma_\varepsilon(t_2))=|t_1-t_2|$.)

(ii) 令 $F(t,\theta)=(t,\theta)$. 问 $\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(t,\theta_0)$ 是否是沿测地线 σ_{θ_0} 上的 Jacobi 场?

(iii) 计算 $\dfrac{\partial}{\partial t}\left\langle\dfrac{\partial F}{\partial\theta},\dfrac{\partial F}{\partial\theta}\right\rangle$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial t}\left\langle\dfrac{\partial F}{\partial t},\dfrac{\partial F}{\partial\theta}\right\rangle$, 问 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 是否和向量场 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 平行?

(iv) 假设 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dfrac{\partial}{\partial\theta}=\lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial\theta}$, 找出 $\lambda(t)$.

(v) 因为 $\left.\dfrac{\partial F}{\partial\theta}\right|_{(t,\theta_0)}=J(t)$ 是 $\sigma_{\theta_0}(\cdot)$ 上的 Jacobi 场, 所以满足 Jacobi 方程 $J''(t)+K(t)J(t)=0$, 试计算 $J''(t)$ 和证明

$$K(t)=-\frac{f''(t)}{f(t)}.$$

2 (单位球面的曲率). 我们考虑单位球面 $S^2(1)$ 上的球坐标系

$$\begin{cases}x=\mathrm{sin}t\ \mathrm{cos}\theta,\\ y=\mathrm{sin}t\ \mathrm{sin}\theta,\\ z=\mathrm{cos}t.\end{cases}$$

(i) 问 $S^2(1)\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ 上球面经典度量是否是

$$g=dt^2+(\mathrm{sin}t)^2d\theta^2.$$

(ii) 什么是 $S^2(1)$ 经典度量的曲率?(提示：用题 1 的结果.)

3 (计算欧氏平面的曲率). 取欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的标准坐标

$$\begin{cases}x=t\mathrm{cos}\theta,\\ y=t\mathrm{sin}\theta.\end{cases}$$

试找出经典度量 $g=dx^2+dy^2=dt^2+f^2(t)d\theta^2$ 中的 $f(t)$ 并计算 $\mathbb{R}^2$ 的曲率.

4 (双曲空间 $\mathbb{H}^2$ 的曲率). 在圆盘 $D^2=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 的 Poincaré 度量 $g=\dfrac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}=\dfrac{4(dr^2+r^2d\theta^2)}{(1-r^2)^2}$, 这里 $r^2=x^2+y^2$.

(i) 令 $r=\dfrac{e^t-1}{e^t+1}$ 或 $t=\log\left|\dfrac{1+r}{1-r}\right|$, 证明

$$g=dt^2+(\mathrm{sinh}t)^2d\theta^2,$$

这里 $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

(ii) 用题 1 计算 Poincaré 度量的曲率.

5 (Riemann 子流形的曲率). 设 $(\bar{M}^m, \bar{g})$ 是个完备的 Riemann 流形, $M^n \subset \bar{M}^m$ 为 $\bar{M}^m$ 中的光滑子流形. 假定 $\bar{\nabla}$ 是 $(\bar{M}^m, \bar{g})$ 的 Riemann 联络.

(i) 当 X 和 Y 是 M^n 上的切向量场且 η 是个法向量场时, 问是否有 $\langle \bar{\nabla}_X Y, \eta\rangle = \langle \bar{\nabla}_Y X, \eta\rangle$ 成立?

(ii) 如 $p \in M^n \subset \bar{M}^m$ 和 $v \in T_p\bar{M}^m$. 我们令 $v^\perp$ 表示向量 v 的法分量. 定义向量值二次形式

$$\mathrm{II}(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

试问等式 $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X)$ 对所有 M^n 上的切向量场成立?

(iii) 令 $\bar{K}(X, Y)$ 为 $(\bar{M}^m, \bar{g})$ 关于由 X 和 Y 张成平面的曲率, $K(X, Y)$ 为 (M^n, g) 相应的截面曲率. 验证如下的 Gauss 公式.

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \frac{\langle \mathrm{II}(X, X), \mathrm{II}(Y, Y)\rangle - \|\mathrm{II}(X, Y)\|^2}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2},$$

这里 X 不平行于 Y.

6 (欧氏空间中的 Riemann 子流形的曲率). 假设 $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 是欧氏空间的 Riemann 子流形,

$$\begin{aligned} F:\quad & D^2 \to M^n, \\ & (u, v) \to F(u, v) \end{aligned}$$

是个浸入映射, $X = F_u$ 和 $Y = F_v$. 问

$$K(X, Y) = \frac{\langle (F_{uu})^\perp, (F_{vv})^\perp\rangle - \|(F_{uv})^\perp\|^2}{\|F_u\|^2\|F_v\|^2 - \langle F_u, F_v\rangle^2}$$

是否依赖于浸入 F 的选取, 这里 $(\xi)^\perp$ 代表 $\xi \in T_p\mathbb{R}^m = T_pM^n \oplus N_pM^n$ 的法分量.

7 (函数图像曲面的曲率). 假设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 M^2 由函数 $(u, v) \to h(u, v)$ 的图像决定, 即

$$M^2 = \{(u, v, h(u, v)) | (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

试用题 6 计算 M^2 的曲率. (提示：试导出

$$\left\langle (F_{uu})^\perp, (F_{vv})^\perp \right\rangle - \|(F_{uv})^\perp\|^2 = \frac{h_{uu}h_{vv} - (h_{uv})^2}{1 + h_u^2 + h_v^2} \text{ 和 } N = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}\Bigg).$$

8 (抛物面的曲率). 考虑双曲面 $M^2 = \{(u, v, u^2 + v^2) | (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$. 计算该曲面在点 $p = (u, v, u^2 + v^2)$ 处的曲率. (提示：用题 6.)

(i) 如 $d(O, p)$ 表示点 p 和原点 O 在 M^2 中的距离, 问是否有

$$r = d(O, p) = O(u^2 + v^2)$$

成立, 这里 $O(u^2+v^2)$ 表示和 (u^2+v^2) 有相同的增长率.

(ii) 当 $r\to\infty$ 时, 估计 $K|_p$. 是否有

$$\lim_{r\to\infty}K(p)=0$$

和 $K\geqslant 0$ 成立?

9 (单叶双曲面的曲率). 令 $M^2=\{(u,v,u^2-v^2)|(u,v)\in\mathbb{R}^2\}$. 如果 $K=\dfrac{h_{uu}h_{vv}-h_{uv}}{1+h_u^2+h_v^2}$, 试证明

$$K=-4+O(r^2)$$

和 $K<0$, 这里 $r=d((0,0,0),(u,v,u^2-v^2))$.

10 (比较定理的应用). 假设 (M^2,g) 是个单连通完备 Riemann 曲面, 并且具有非正曲率. 考虑在一点 p 处的指数映射:

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}\text{：}\quad &\mathbb{R}^2\to M^2,\\ &(r,\theta)\to \mathrm{Exp}_p(r\theta),\end{aligned}$$

这里 $\{(r,\theta)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的极坐标表示.

(i) 固定 θ_0, 问曲线 σ_{θ_0}：$r\to\mathrm{Exp}_p(r\theta_0)$ 是否是测地线?

(ii) 令 $J(r)=\left.\dfrac{\partial \mathrm{Exp}_p}{\partial\theta}\right|_{(r,\theta_0)}$. 试问向量场 J 是否是 σ_{θ_0} 上的 Jacobi 场并且满足 $J(0)=0, \|J'(0)\|=1$ 和 $\langle J'(r),\sigma'_{\theta_0}(r)\rangle=0$?

(iii) 用 Rauch 比较定理证明 $\|J(r)\|\geqslant r$.

(iv) 令 $S_p(r)=\{q\in M^2|d(q,p)=r\}$, $L(r)$ 为 $S_p(r)$ 的长度. 用 (iii) 的结果估计

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\|J(r,\theta)\|d\theta$$

的下界.

11 (Bishop 定理的应用). 令 (M^2,g) 为一个非紧完备的 Riemann 曲面, 且具有非负曲率. 假设 $S_r(p_0)=\{q\in M^2|d(q,p_0)=r\}$, $L(r)$ 为 $S_r(p_0)$ 的长度, 用 Gromov-Bishop 定理给出一个 $L(r)$ 的上界.

第三章　共轭点和最大直径定理

在本章中, 我们将讨论测地线、距离函数和曲率三者之间的关系.

§3.1　共轭点、第二变分公式

假设 σ：$[0,+\infty)\to M^n$ 是完备流形 (M^n,g) 中一条测地线满足 $\|\sigma'(t)\|\equiv 1$, 我们要关心的是在什么条件下等式

$$d(\sigma(0),\ \sigma(t))=|t| \tag{3.1}$$

成立? 我们首先考虑如下的例子.

设 $(M^2,g)=S^2(1)\subset\mathbb{R}^3$ 是单位球面, 这里 $S^2(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$. 考虑曲线 $\sigma(t)=(\cos t,\sin t,0)$. 我们已经证明 $\sigma''(t)\in N_{\sigma(t)}M^2$, 所以 $\nabla_{\sigma'}\sigma'=[\sigma''(t)]^T=0$, 即 σ 是测地线. 显然 $\|\sigma'(t)\|\equiv 1$, 但是 $\sigma(2\pi)=\sigma(0)$, 从而

$$d(\sigma(2\pi),\ \sigma(0))=0<2\pi.$$

这个例子说明 (3.1) 不一定对所有 t 成立.

一般地, 当 Exp_p：$B_\varepsilon(O)\to M^n$ 是嵌入时, 由 Gauss 引理的推论 1.23 得出 $d(\sigma(t),\sigma(0))=|t|$ 对充分小的 t 都成立.

另一方面, 假设存在一个 t_0 使得 $d(\sigma(t_0),\sigma(0))<t_0$. 那么对任何 $a>0$, 由三角不等式得出

$$\begin{aligned}d(\sigma(t_0+a),\ \sigma(0))&\leqslant d(\sigma(t_0+a),\ \sigma(t_0))+d(\sigma(t_0),\ \sigma(0))\\&<t_0+a.\end{aligned}$$

由此看出集合

$$E_v=\{t\mid d(\sigma(t),\ \sigma(0))=t,\ \sigma'(0)=v,\ \|v\|=1\}$$

或者为 $[0,+\infty)$ 或者等于 $[0,t_0]$ 对某个 t_0 成立. 如果 $E_v=[0,t_0]$, 我们则称 $\sigma(t_0)$ 为 $\sigma(0)$ 的割点.

割点和共轭点之间有着十分密切的联系.

定义 3.1　设 σ：$[a,b]\to M^n$ 是完备 Riemann 流形中的一条测地线, $\sigma(a)=p$, $\sigma(b)=q$, 而且假设 $\{J(t)\}$ 是测地线 σ 上非平凡的 Jacobi 场使得 $J(a)=J(b)=0$, 这里 $b>a$. 则我们称 p 和 q 沿 σ 共轭 (或者称 q 是 p 在 σ 上的一个共轭点).

下面我们讨论当一条测地线通过共轭点时距离函数的变化.

定理 3.2(Jacobi 定理)　设 (M^n,g) 是个完备的 Riemann 流形, $\sigma(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)$, $\|v\|=1, q=\mathrm{Exp}_p(t_0v)$ 而且 q 和 p 沿 σ 上共轭, 则严格不等式

$$d(\sigma(0),\ \sigma(t_0+\varepsilon))<L(\sigma|_{[0,t_0+\varepsilon]})$$

对所有 $\varepsilon>0$ 成立.

我们首先举例说明 (或在一个特殊情况下) 定理 3.2 成立. 假设有如下一个特殊情况：假设存在两条不同的测地线 σ 和 φ 连结相同端点 p 和 q, $\|\sigma'\|=\|\varphi'\|=1$(见图 9). 此时我们可以选取一条连 $\varphi(t_0-\varepsilon)$ 和 $\sigma(t_0+\varepsilon)$ 的最短测地线 ψ. 因为两条测地线 φ 和 σ 不相等, 所以必有 $\varphi'(t_0)\neq\sigma'(t_0)$. 从距离函数的严格三角不等式我们得出

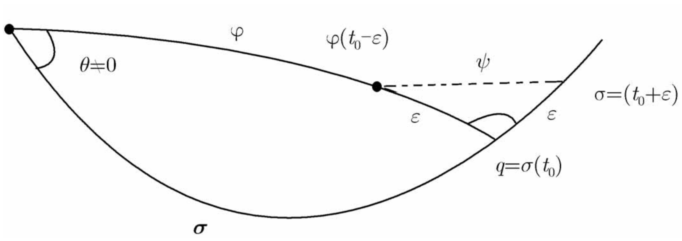


图 9

$$\begin{aligned}L(\psi)&<d(\varphi(t_0-\varepsilon),\ q)+d(q,\ \sigma(t_0+\varepsilon))\\&=\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

这里 $L(\psi)$ 表示曲线 ψ 的长度. 更进一步, 我们有

$$L(\psi\bigcup\varphi|_{[0,t_0-\varepsilon]})<2\varepsilon+(t_0-\varepsilon)=t_0+\varepsilon.$$

但是

$$L(\sigma|_{[0,t_0+\varepsilon]})=t_0+\varepsilon>L(\varphi|_{[0,t_0-\varepsilon]}\bigcup\psi),$$

因此 $\sigma|_{[0,t_0+\varepsilon]}$ 不是连端点 $\sigma(0)$ 和 $\sigma(t_0+\varepsilon)$ 的最短线段. 换言之,

$$d(\sigma(t_0+\varepsilon),\ \sigma(0))<t_0+\varepsilon.$$

为了给出定理 3.2 在一般情形下的证明, 我们需构造一个单参数族曲线 $\{\beta_s(\cdot)\}_{-1\leqslant s\leqslant 1}$ 使得

(i) $\beta_0 = \sigma|_{[0,t_0+\varepsilon]}$,

(ii) $\beta_s(0) \equiv \sigma(0)$ 和 $\beta_s(t_0+\varepsilon) = \sigma(t_0+\varepsilon)$, 对所有 s 成立,

(iii) $\left\langle \dfrac{\partial \beta_s}{\partial s}(t)\Big|_{s=0},\ \sigma'(t) \right\rangle \equiv 0$, 对所有 t 成立,

(iv) $c = \dfrac{d^2 L(\beta_s)}{ds^2}\Big|_{s=0} < 0$,

这里 β_s: $[0, t_0+\varepsilon] \to M^n$, $L(\beta_s)$ 代表 β_s 的长度.

因为 $\beta_0 = \sigma$ 是测地线, 我们在第一章已经证明 $\dfrac{\partial L(\beta_s)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0$, 从而如果性质 (iv) 成立, 则我们有

$$L(\beta_s) = L(\sigma) + \frac{c}{2}s^2 + o(s^3) < L(\sigma|_{[0,t_0+\varepsilon]}),$$

这里 $c<0$ 由 (iv) 给出, $|s|$ 充分小但 $s \neq 0$.

为了讨论性质 (iv), 我们需要导出第二变分公式. 令

$$\alpha\colon [a,\ b] \times [-1,\ 1] \times [-1, 1] \to M^n,$$

$$(t,\ v,\ w) \to \alpha(t,\ v,\ w)$$

是一个光滑映射, $T = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$, $V = \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}$ 和 $W = \dfrac{\partial \alpha}{\partial w}$. 很明显, 长度函数由下列公式给出:

$$L(v, w) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t,\ v,\ w) \right\| dt = \int_a^b \|T\| dt.$$

我们已知

$$\frac{\partial L}{\partial v}(v,\ w) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_T V,\ T\rangle}{\|T\|} dt,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L(v,w)}{\partial w \partial v} &= \frac{\partial}{\partial w}\int_a^b \frac{\langle \nabla_T V,\ T\rangle}{\|T\|} dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\langle \nabla_W \nabla_T V,\ T\rangle + \langle \nabla_T V,\ \nabla_W T\rangle}{\|T\|} - \langle \nabla_T V,\ T\rangle \frac{\langle \nabla_W T,\ T\rangle}{\|T\|^3} \right\} dt.\end{aligned}$$

以下我们总是假设

$$\|T\|\Big|_{(0,0)} \equiv 1,\ \nabla_T T\Big|_{(0,0)} \equiv 0 \equiv \langle T,\ W\rangle\Big|_{(0,0)} \equiv \langle T,\ V\rangle\Big|_{(0,0)}. \tag{3.2}$$

用条件 (3.2) 和分部积分, 我们可进一步推出

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 L}{\partial v\partial w}\right|_{(0,0)} =& \int_a^b \{\langle -R(W,\ T)V,\ T\rangle + \langle \nabla_T\nabla_W V,\ T\rangle \\
&+\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle \nabla_T V,\ T\rangle\langle \nabla_T W,\ T\rangle\}\, dt \\
=& \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle R(W,T)V,\ T\rangle + T\langle \nabla_W V,\ T\rangle - T\langle V,\ T\rangle T\langle W,T\rangle\}\, dt \\
=& \langle \nabla_W V,\ T\rangle\Big|_a^b + \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle R(W,\ T)V,\ T\rangle\}\, dt.
\end{aligned}
$$

很显然, 二次形式

$$
I(V,\ W) = \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle R(W,\ T)V,\ T\rangle\}\, dt
$$

关于 V 和 W 对称.

在特殊情形的讨论中, 我们已经用过了连续但分片光滑曲线 $\varphi|_{[0,t_0-\varepsilon]}\bigcup\psi$. 类似地, 我们也要考虑连续且分片光滑的变分.

如果 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = b$ 使得 $V,\ W\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 光滑, 我们可用

$$
\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle = T\langle \nabla_T V,\ W\rangle - \langle \nabla_T\nabla_T V,\ W\rangle
$$

和分片分部积分得到

$$
\begin{aligned}
I(V,\ W) =& \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle R(W,\ T)V, T\rangle\}\, dt \\
=& \sum_{i=1}^k \langle \Delta_{t_i}(\nabla_T V),\ W\rangle - \int_a^b \langle \nabla_T\nabla_T V + R(T,\ V)T,\ W\rangle dt,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

这里

$$
\Delta_{t_i}(\nabla_T V) = \lim_{t\searrow t_i} \nabla_T V - \lim_{t\nearrow t_i} \nabla_T V.
$$

特别地, 如果 $V|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 是 Jacobi 场, 则有

$$
I(V,\ W) = \sum_i \langle \Delta_{t_i}(\nabla_T V),\ W\rangle. \tag{3.4}
$$

因此, 我们有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 L}{\partial v\partial w}\right|_{(0,0)} =& \langle \nabla_W V,\ T\rangle\Big|_a^b + \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle - \langle R(T,V)T, W\rangle\}\, dt \\
=& \langle \nabla_W V,\ T\rangle\Big|_a^b + I(V,\ W).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

用 (3.3)~(3.4), 我们可以完成定理 3.2 的证明.

定理 3.2 的证明 因为 $\sigma(0)$ 和 $\sigma(t_0)$ 沿 σ 共轭, 则存在一个非平凡的 Jacobi 场 J 使得 $J(0)=0=J(t_0)$ 且 $\langle J(t),\sigma'(t)\rangle\equiv 0$. 我们考虑连续但分片光滑的 Jacobi 场

$$\hat{J}(t)=\begin{cases} J(t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t\leqslant t_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

在 σ 上另外取一个平行向量场 $\{E(t)\}_{t\geqslant 0}$ 使得

$$E(t_0)=-\nabla_{\sigma'}J\big|_{t_0}. \tag{3.6}$$

再取一个光滑函数 η: $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得

$$\eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{当 } t=0 \text{ 或 } t=t_0+\varepsilon \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } t=t_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

最后我们构造一个在 σ 上连续但分片光滑的向量场

$$V(t)=W(t)=\hat{J}(t)+\lambda\eta(t)E(t). \tag{3.7}$$

令

$$\beta(t,\ s)=\mathrm{Exp}_{\sigma(t)}\{sV(t)\}. \tag{3.8}$$

容易验证有如下结论成立：

(i) $\beta(\cdot,0)=\sigma$,

(ii) $\beta(0,s)\equiv\sigma(0)$ 和 $\beta(t_0+\varepsilon,s)\equiv\sigma(t_0+\varepsilon)$,

(iii) 如果 $L(s)=L(\beta(\cdot,s)\ \big|_{[0,t_0+\varepsilon]})$, 则有

$$\frac{dL}{ds}\Big|_{s=0}=0.$$

下面我们验证, 当取充分小的 λ 时

$$\frac{d^2L}{ds^2}\Big|_{s=0}<0. \tag{3.9}$$

如果固定 t, $\beta(t,\cdot)$ 是条测地线, 从而

$$\nabla_V W=\nabla_V V\equiv 0.$$

易验证 V 和 W 满足 (3.2). 由 (3.5) 得 (取 $a=0$ 和 $b=t_0+\varepsilon$)

$$\frac{d^2L}{ds^2}\Big|_{s=0}=I(V,\ V).$$

我们再应用指标形式 $I(\cdot,\cdot)$ 的双线性及等式 (3.3)~(3.4) 得出

$$\begin{aligned}I(V,V)&=I(\hat{J}+\lambda\eta E,\ \hat{J}+\lambda\eta E)\\&=I(\hat{J},\ \hat{J})+2\lambda I(\hat{J},\ \eta E)+\lambda^2 I(\eta E,\ \eta E)\\&\overset{(3.4)}{=\!=}0+2\lambda<\Delta_{t_0}\hat{J},\ \eta E(t_0)>+O(\lambda^2)\\&=-2\lambda\|\nabla_{\sigma'}J\|^2(t_0)+O(\lambda^2).\end{aligned}$$

当取 $0<\lambda<\dfrac{2\|J'(t_0)\|^2}{|I(\eta E,\ \eta E)|}$ 时, 我们就有

$$\frac{d^2L}{ds^2}\Big|_{s=0}=I(V,\ V)<0,$$

从而 (3.9) 成立, 定理 3.2 的证明完成.　证毕.

下面的命题给出关于共轭点的几何描述.

命题 3.3　设 $q=\mathrm{Exp}_p v$, $\sigma(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)$. 则 p 和 q 沿 σ 共轭当且仅当 $(\mathrm{Exp}_p)_*|_v$ 不满秩.

证明　假如 p 和 q 沿 σ 共轭, J 为非平凡的 Jacobi 向量场, 使 $J(0)=0=J(1)$. 因 $\{J(t)\}$ 非平凡, 则有 $J'(0)\neq 0$. 令 $\beta(t,s)=\mathrm{Exp}_p[t(v+sJ'(0))]$, 则 $J(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial s}(t,0)$, 而且有

$$0=J(1)=(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_v J'(0).$$

注意到 $J'(0)\neq 0$, 即有 $\ker(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_v\neq 0$ 从而 $(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_v$ 不满秩.

反之, 如果存在 $\xi\neq 0$ 使得 $(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_v\xi=0$, 则令

$$\beta(t,\ s)=\mathrm{Exp}_p[t(v+s\xi)].$$

显然 $J(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial t}(t,0)$ 是 σ 上的 Jacobi 场, 满足

$$J(0)=0,\ J(1)=(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_v\xi=0.$$

因为 $\xi\neq 0$, 所以 $J'(0)=\xi\neq 0$, 从而 $\{J(t)\}$ 非平凡. 因此由定义知 p 和 q 沿 σ 共轭.　证毕.

推论 3.4 设 (M^n,g) 是个完备 Riemann 流形, $p_0 \in M^n$. 如果存在 $t_0>0$ 使得对所有 $v \in S_{p_0}M^n \subset T_{p_0}M^n$, $(\mathrm{Exp}_{p_0})_*\big|_{t_v v}$ 不满秩对某个 $0<t_v \leqslant t_0$ 成立, 则

$$\sup_{q\in M^n}\{d(q,\ p_0)\} \leqslant t_0.$$

证明 任取 $q \in M^n$, 我们可以选取一条连 p_0 到 q 的最短测地线段 σ: $[0,l] \to M^n$. $\sigma(0)=p_0, \sigma(l)=q$, $\sigma'(0)=v$, $\|v\|=1$ 和 $\mathrm{Exp}_{p_0}(tv)=\sigma(t)$. 显然

$$d(p_0,\ q)=l. \tag{3.10}$$

我们要证明 $l \leqslant t_0$. 假设 $l=d(p_0,q)>t_0$, 则 $\sigma|_{[0,l]}$ 上必有 p_0 的共轭点 (这是因为存在 t_v, 使 $t_v \leqslant t_0 < l$, $(\mathrm{Exp}_{p_0})|_{t_v v}$ 不满秩. 由命题 3.3 推出 $\sigma(t_v)$ 和 $\sigma(0)=p_0$ 共轭). 应用定理 3.2, 我们得出 $\forall\, \varepsilon>0$,

$$d(\sigma(t_v+\varepsilon),\ \sigma(0)) < t_v+\varepsilon.$$

特别地

$$\begin{aligned} d(p_0,\ q) &= d(\sigma(0),\ \sigma(l)) < t_v+\varepsilon+(l-t_v-\varepsilon) \\ &= l, \end{aligned}$$

与 (3.10) 矛盾. 所以

$$d(p_0,\ q) \leqslant l \leqslant t_0.$$

证毕.

§3.2 Ricci 曲率和 Myers 直径定理

本节我们用 Gromov-Bishop 比较定理和上节的推论 3.4 验证下列结果.

定理 3.5(Myers) 设 (M^n,g) 是个完备的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}_{(M^n,g)} \geqslant (n-1)$, 则 (M^n,g) 的直径满足

$$\mathrm{Diam}(M^n,g)=\sup\{d(p,q) \mid p,q \in M^n\} \leqslant \pi.$$

证明 由推论 3.4, 我们只需证明：对任意 $v \in T_pM^n, \|v\|=1$, 令 $\sigma(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)$, 则 $\sigma|_{[0,\pi]}$ 至少有一个 p 的共轭点.

为了验证这一点, 我们考虑在 p 处的测地极坐标 $\{(r,\Theta)\}$：

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_p\text{：}\quad & \mathbb{R}^n \to M^n, \\ & (r,\ \Theta) \to \mathrm{Exp}_p(r\Theta), \end{aligned}$$

这里 $\Theta \in S^{n-1}(1)$. 令 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 为 $T_\Theta(S^{n-1}(1))$ 的一个正交基.

$$g_{ij}(t) = g_{ij}(t,\ v) = \left\langle (\mathrm{Exp}_p)_*\big|_{tv}(te_i),\ (\mathrm{Exp}_p)_*\big|_{tv}(te_j) \right\rangle,$$

则

$$\varphi(t) = \varphi(t,\ v) = \sqrt{\det(g_{ij}(t,\ v))},$$

$$d\mathrm{vol}_{(M^n,g)} = \varphi(t,\ \Theta) d\Theta dt.$$

因为 $\mathrm{Ric}(M^n, g) \geqslant (n-1)$, 由 Gromov-Bishop 比较定理 2.9 得到

$$\frac{\varphi(t,\ \Theta)}{(\sin t)^{n-1}}$$

是个递减函数. 由于 $\sin\pi = 0$, 我们可推出存在 $t_v \in [0, \pi]$ 使得 $\varphi(t_v, v) = 0$, 从而由命题 3.3 和推论 3.4 导出 $(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_{t_v v}$ 非满秩. 如果 $d(p, q) = l$, 则

$$d(p, q) = l \leqslant t_v \leqslant \pi.$$

证毕.

§3.3　郑绍远最大直径定理的简单证明

1975 年郑绍远用特征值估计的方法得出了下列刚性定理, 我们这里用 Gromov-Bishop 比较定理来重新验证他的结果.

定理 3.6(郑绍远)　设 (M^n, g) 为一个紧 Riemann 流形满足 $\mathrm{Ric}_{(M^n,g)} \geqslant (n-1)$, $\mathrm{Diam}(M^n, g) = \pi$. 则 (M^n, g) 必等距于单位球面 $S^n(1) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$.

证明　取 M^n 中的两点 p_0, q_0 使得

$$d(p_0,\ q_0) = \mathrm{Diam}(M^n,\ g) = \pi.$$

令

$$B_r(p) = \{q \in M^n \mid d(q,\ p) < r\},$$

$$\hat{B}_{\frac{\pi}{2}}(0) = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n(1) \mid x_{n+1} > 0\}.$$

因为 $\mathrm{Ric}_{(M^n,g)} \geqslant (n-1)$, 由 Myers 定理 (定理 3.5) 得

$$\mathrm{Diam}(M^n,\ g) \leqslant \pi.$$

因此

$$\overline{B_\pi(p_0)} = \overline{B_\pi(q_0)} = M^n,$$

$$\mathrm{vol}(M^n,\ g) = \mathrm{vol}[B_\pi(q_0)] = \mathrm{vol}[B_\pi(p_0)].$$

又因 $\mathrm{Ric}_M \geqslant (n-1)$ 和 Gromov-Bishop 比较定理, 我们有

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(p_0))}{\mathrm{vol}(\hat{B}_{\frac{\pi}{2}}(0))} \geqslant \frac{\mathrm{vol}(B_\pi(p_0))}{\mathrm{vol}(S^n(1))},$$

即

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(p_0))}{\mathrm{vol}(M^n)} \geqslant \frac{\mathrm{vol}(\hat{B}_{\frac{\pi}{2}}(0))}{\mathrm{vol}(S^n(1))} = \frac{1}{2}.$$

等式成立当仅当 $\overline{B_\pi(p_0)}$ 等距于 $S^n(1)$. 即 (M^n, g) 等距于 $S^n(1)$.

用同样理由, 我们也可以得出

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(q_0))}{\mathrm{vol}(M^n)} \geqslant \frac{1}{2}.$$

注意 $d(p_0, q_0) = \pi$, 所以

$$B_{\frac{\pi}{2}}(p_0) \cap B_{\frac{\pi}{2}}(q_0) = \varnothing.$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(M^n, g) &\geqslant \mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(p_0)) + \mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(q_0)) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\mathrm{vol}(M^n) + \frac{1}{2}\mathrm{vol}(M^n) \\ &= \mathrm{vol}(M^n,\ g).\end{aligned}$$

此时显然有

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{\frac{\pi}{2}}(p_0))}{\mathrm{vol}(M^n)} = \frac{\mathrm{vol}(\hat{B}_{\frac{\pi}{2}}(0))}{\mathrm{vol}(S^n(1))} = \frac{1}{2}.$$

再次应用 Gromov-Bishop 定理, 可推出 $M^n = \overline{B_\pi(0)}$ 等距于 $S^n(1)$.　证毕.

§3.4　Calabi-Yau 体积线性估计

本节中我们要讨论具有非负 Ricci 曲率流形中测地实心球的体积估计. 我们首先看一个例子.

例　考虑一个乘积流形 $M^n = S^{n-1}(1) \times \mathbb{R}$. 在 M^n 上选取典型的乘积度量 $g = g_1 \oplus g_0$, 这里 g_1 是 $S^{n-1}(1)$ 上截面曲率为 1 的标准度量. 很显然 (M^n, g) 具有非负的 Ricci 曲率. 令 $B_r(p_0)$ 为半径为 r、中心在 p_0 处的测地球, $p_0 = (q_0, 0)$, $q_0 \in S^{n-1}(1)$. 不难验算 $B_r(p_0) \subset S^{n-1}(1) \times (-r, r)$, 从而 $B_r(p_0)$ 的体积最多是线性增长：

$$\mathrm{vol}(B_r(p_0)) \leqslant C_{n-1} r. \tag{3.11}$$

受上述例子启发, Calabi 和丘成桐发现了下列体积估计.

定理 3.7(Calabi-Yau) 假设 (M^n, g) 是个非紧完备的具有非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形. 令 $B_r(x)$ 是半径为 r、中心在 x 处的实心球, 则球 $B_r(x)$ 的体积至少有线性增长

$$\mathrm{vol}(B_r(x)) \geqslant c(x)r. \tag{3.12}$$

我们下面介绍由 Gromov 给出的定理 3.7 的证明. 其方法是 §2.5 中 Gromov-Bishop 定理证明的改进. 首先我们引述和导出下面的一个分析不等式.

引理 3.8(Gromov) 如果 f, $\hat{f}$ 是两个正函数, 且假设 $\dfrac{f}{\hat{f}}$ 单调下降则对所有 $0 < r < R$ 都有

$$\frac{\displaystyle\int_0^r f(t)dt}{\displaystyle\int_0^r \hat{f}(t)dt} \geqslant \frac{\displaystyle\int_r^R f(t)dt}{\displaystyle\int_r^R \hat{f}(t)dt}. \tag{3.13}$$

证明 令 $q(t) = \dfrac{f(t)}{\hat{f}(t)}$ 单调下降. 我们观察到

$$\begin{aligned}\int_0^r f(t)dt\int_r^R \hat{f}(t)dt &= \int_0^r \hat{f}(t)q(t)dt\int_r^R \hat{f}(t)dt \geqslant q(r)\int_0^r \hat{f}(t)dt\int_r^R \hat{f}(t)dt\\ &\geqslant \left(\int_0^r \hat{f}(t)dt\right)\left(\int_r^R q(t)\hat{f}(t)dt\right)\\ &= \int_0^r \hat{f}(t)dt\int_r^R f(t)dt,\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\displaystyle\int_0^r f(t)dt}{\displaystyle\int_0^r \hat{f}(t)dt} \geqslant \frac{\displaystyle\int_r^R f(t)dt}{\displaystyle\int_r^R \hat{f}\ (t)dt}$$

成立. 证毕.

推论 3.9 如果 (M^n, g) 是个完备的具有非负 Ricci 曲率的流形, 令 $B_r(x)$ 如上, 则

$$\frac{\mathrm{vol}(B_r(x))}{C_n r^n} \geqslant \frac{\mathrm{vol}(B_R(x)) - \mathrm{vol}(B_r(x))}{C_n[R^n - r^n]},$$

即

$$\mathrm{vol}(B_r(x)) \geqslant \frac{r^n}{R^n - r^n}[\mathrm{vol}(B_R(x)) - \mathrm{vol}(B_r(x))].$$

有了推论 3.9, 我们可以完成定理 3.7 的证明.

Calabi-Yau 体积估计 (定理 3.7) 的证明 因为 (M^n, g) 非紧、完备, 所以存在一条从 x 出发的半直线 σ: $[0,\infty)\to M^n$ 使得 $\sigma(0)=x$ 且有

$$d(\sigma(t_1),\ \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|. \tag{3.14}$$

令 $x_k=\sigma(k)$. 首先根据 §2.5 中 Gromov-Bishop 体积比较定理, 我们有

$$\mathrm{vol}(B_{k-1}(x_k)) \geqslant \frac{(k-1)^n}{(k+1)^n}\mathrm{vol}(B_{k+1}(x_k)).$$

根据推论 3.9, 我们更有 (取 $R=k+1,\ r=k-1$)

$$\mathrm{vol}(B_{k-1}(x_k)) \geqslant \frac{(k-1)^n}{(k+1)^n-(k-1)^n}[\mathrm{vol}(B_{k+1}(x_k)) - \mathrm{vol}(B_{k-1}(x_k))]. \tag{3.15}$$

由 (3.15) 和距离函数的三角不等式, 我们有 (参见图 10)

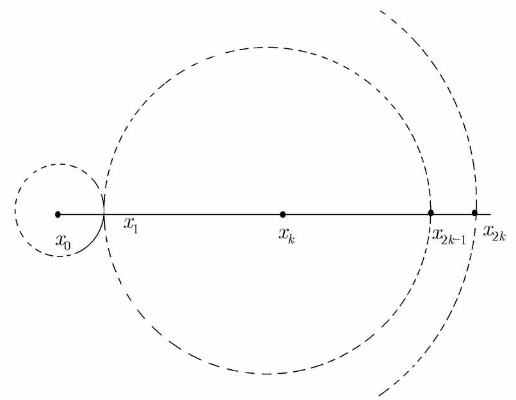


图 10

$$B_1(x) = B_1(x_0) \subset [B_{k+1}(x_k) - B_{k-1}(x_k)] \tag{3.16}$$

和

$$B_{2k}(x) = B_{2k}(x_0) \supset B_{k-1}(x_k). \tag{3.17}$$

最后, 我们得出 (由 (3.16)~(3.18))

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B_{2k}(x_0)) &\underset{(3.18)}{\geqslant} \mathrm{vol}(B_{k-1}(x_k)) \\
&\underset{(3.16)}{\geqslant} \frac{(k-1)^n}{(k+1)^n-(k-1)^n}[\mathrm{vol}(B_{k+1}(x_k))-\mathrm{vol}(B_{k-1}(x_k))] \\
&\underset{(3.17)}{\geqslant} \frac{(k-1)^n}{(k+1)^n-(k-1)^n}\mathrm{vol}(B_1(x_0)) \\
&\geqslant 2c(x_0)k=c(x_0)2k,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

这里 $c(x_0)$ 是依赖于 x_0 的常数. 再令 $r=2k$, 由 (3.19) 我们得出

$$\mathrm{vol}(B_r(x)) \geqslant c(x)r. \tag{3.19}$$

证毕.

Calabi 关于定理 3.8 的证明没有发表, 他的证明通过考虑 σ 上的 Riccati 方程得出. Gromov 的证明比 Calabi 的证明更巧一些. 丘成桐的证明请见 [Y3]. 根据丘先生自己的看法, 文章 [Y3] 是他开始其著名的梯度估计的起点, 是一个突破性的工作, 从此开始了微分几何中一场新的革命, 即用微分方程解决微分几何的问题.

习　题　三

1(椭圆面的共轭点).　我们首先考虑旋转对称椭圆面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

若令

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\sin\theta, \\ y=a\sin\varphi\cos\theta, \\ z=b\cos\varphi, \end{cases}$$

则椭圆面的 Riemann 度量在 $\{(\varphi,\theta)\}$ 坐标系下可写成

$$g=h_1^2(\varphi)d\varphi^2+h_2^2(\varphi)d\theta^2.$$

(i) 找出 $h_1(\varphi)$ 和 $h_2(\varphi)$.

(ii) 作变换 $t=\displaystyle\int_0^\varphi[b^2\cos^2u+a^2\sin^2u]^{\frac{1}{2}}du$, 证明

$$g=dt^2+f^2(t)d\theta^2,$$

且 $f(0)$=0 和 $f(t_0)=0,\ 0\leqslant t\leqslant t_0$.

(iii) 由习题二中的题 1, $\sigma_\varepsilon(t)=(t,\varepsilon)$ 是条测地线. 试证明当 $\theta=\varepsilon=0$ 时, 曲线

$$\hat{\sigma}\colon \varphi\to(0,\ a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$$

在作了参数变换 $t=\displaystyle\int_0^{\varphi}\sqrt{b^2\cos^2u+a^2\sin^2u}du$ 后是一条测地线.

(iv) $\hat{J}(\varphi)=(a\sin\varphi,0,0)$ 是 $\hat{\sigma}_0$ 上的 Jacobi 场. 计算 $\hat{J}(0)$ 和 $\hat{J}(\pi)$.

(v) 令 $p=(-b,0,0)$ 和 $q=(b,0,0)$. 问 p 和 q 是否共轭?

2(单位球面上的 Jacobi 场). 考虑 $S^{n-1}(1)=\{x\in\mathbb{R}^n\ ||x|=1\}$. 对任何 $p\in S^{n-1}(1)$, 考虑一个单位初速度 $v\in T_p(S^{n-1}(1))$.

(i) 问：$\sigma(t)=(\cos t)p+(\sin t)v$ 是否一条测地线?

(ii) 令 $u\perp v$ 和 $\|u\|=1$, $u\in T_p(S^{n-1}(1))$. 考虑

$$\beta(t,\ \varepsilon)=(\cos t)p+(\sin t)[(\cos\varepsilon)v+(\sin\varepsilon)u],$$

问 $J(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}(t,0)$ 是否是 σ 上的一个 Jacobi 场?

(iii) 计算 $J(0)$ 和 $J(t)$.

(iv) 找出 p 的共轭点.

3(非正曲率流形上的共轭点). 假设完备 Riemann 流形 (M^n,g) 具有非正截曲率 $K_{M^n}\leqslant 0$, 且假设 $\sigma\colon[0,+\infty)\to M^n$ 是一条具有单位速度的测地线.

(i) 假设 $\{J(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 σ 上的 Jacobi 场满足 $J(0)=0$, $\langle J'(0),\,\sigma'(0)\rangle=0$ 和 $\|J'(0)\|=1$. 用比较定理找出商 $\dfrac{\|J(t)\|}{t}$ 的下界.

(ii) 问初始点 $p=\sigma(0)$ 是否有共轭点?

4(抛物面上的共轭点). 令 $M^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面.

(i) 找出从原点出发的所有测地线.

(ii) 假设 $\sigma\colon[0,+\infty)\to M^2$ 是一条从原点出发的具有单位速度的测地线, 问是否有

$$d(\sigma(s),\ \sigma(t))=|s-t|?$$

(iii) 问原点 $O=(0,0,0)$ 在 M^2 中是否有共轭点?

5(实投影空间的直径). 令 $S^n(1)=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面.

(i) 考虑对径映射

$$\begin{aligned}F\colon S^n(1)&\to S^n(1),\\ x&\to -x,\end{aligned}$$

问 F 是否是等距映射? 找出 $F^2=F\circ F$.

(ii) 实投影空间是 $S^n(1)$ 的商空间 $\mathbb{R}P^n=S^n(1)/\mathbb{Z}_2$, 这里 $\mathbb{Z}_2$ 是由 F 生成的子群. 找出 $\mathbb{R}P^n$ 的直径.

6(复投影空间的直径). 考虑 Hopf 纤维丛

$$S^1\to S^{2m+1}(1)\xrightarrow{\pi}\mathbb{C}P^m$$

和一族单参数等距映射

$$F_\theta\colon \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1},$$

$$(z_1, \cdots, z_{m+1}) \to (\mathrm{e}^{i\theta} z_1, \cdots, \mathrm{e}^{i\theta} z_{m+1}),$$

这里 $i = \sqrt{-1}$,$z_j \in \mathbb{C}$ 是复数,$z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$,$\theta \in [0, 2\pi]$.

(i) 问 F_θ 是否是 $S^{2m+1}(1)$ 上的一个等距映射?

(ii) 如果 $\mathbb{C}P^m = S^{2m+1}(1)/S^1$,$S^1$ 为 $\{F_\theta\}_{\mathbb{C} \leqslant \theta \leqslant 2\pi}$ 生成的子群, 任取 $\mathbb{C}P^m$ 中任何两点 $p = [z_1, \cdots, z_{m+1}]$ 和 $q = [\hat{z}_1, \cdots, \hat{z}_{m+1}]$, 问是否可以找到 $S^{2m+1}(1)$ 中的两点 $P \in \pi^{-1}(p)$ 和 $Q \in \pi^{-1}(q)$ 使得 $d(P, Q) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 这里 $\pi\colon S^{2m+1}(1) \to \mathbb{C}P^m$ 是商映射?

(iii) 什么是 $\mathbb{C}P^m$ 的直径?

7(基本群和直径). 设 $\varGamma = \pi_1(M^n)$ 是流形 M^n 的基本群. 再假设 M^n 具有一个 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)$ 的度量 g.

(i) 令 $\pi\colon \tilde{M}^n \to M^n$ 为流形 M^n 的万有覆盖映射, $\tilde{M}^n$ 为 M^n 的万有覆盖空间. 因为覆盖映射 π 是局部微分同胚, 所以我们考虑 $\tilde{M}^n$ 上的提升度量

$$\langle X,\ Y \rangle_{\tilde{g}} = \langle \pi_* X,\ \pi_* Y \rangle_g.$$

问如果 $\mathrm{Ric}_{(M^n, g)} \geqslant c$ 是否蕴含 $\mathrm{Ric}_{(\tilde{M}^n, \tilde{g})} \geqslant c$?

(ii) 如果 $\mathrm{Ric}_{(M^n, g)} \geqslant (n-1)$, 找出 $\mathrm{Diam}(M^n, g)$、$\mathrm{Diam}(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 和 $|\varGamma| = |\pi_1(M^n)|$ 这三者之间的关系. 这里 $\mathrm{Diam}(M^n, g)$ 表示 Riemann 流形的直径.

8(Milnor 定理). 假设 (M^n, g) 是个紧的 Riemann 流形且 $\mathrm{Ric}_{(M^n, g)} \geqslant 0$.

(i) 如果 $B_r(p) = \{q \in M^n \mid d(p, q) < r\}$, 用 Gromov-Bishop 比较定理找出 $\mathrm{vol}(B_r(p))$ 的上界.

(ii) 令 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 为 (M^n, g) 的万有覆盖空间, 带有 g 的提升度量 $\tilde{g}$. 证明基本群 $\varGamma = \pi_1(M^n)$ 最多具有度数为 n 的增长率, 这里 $n = \dim M^n$.

9(Heisenberg 流形和 Milnor 定理的应用). 考虑 Heisenberg 群

$$\tilde{M}^3 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

和它的子群

$$\varGamma = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & k & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, k, m, n \text{ 为整数} \right\}.$$

(i) 证明离散群 $\varGamma$ 具有四维多项式增长率 (r^4).

(ii) 用 Milnor 定理说明三维 Heisenberg 流形 $M^3 = \tilde{M}^3/\varGamma$ 不会容许任何具有非负 Ricci 曲率的度量.

10. 如果 (M^n, g) 是个紧 Riemann 流形而且具有负截面曲率 $K_{M^n} \leqslant -1$. 令 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是 M^n 的万有覆盖空间且配备提升度量 $\tilde{g}$, $B_r(\tilde{p}) = \{\tilde{q} \in \tilde{M}^n \mid d(\tilde{p}, \tilde{q}) < r\}$.

(i) 用比较定理证明, $\mathrm{vol}(B_r(\tilde{p}))$ 有指数增长率.

(ii) 问基本群 $\Gamma = \pi_1(M^n)$ 是否也有指数增长率?

第四章　单一半径和有限定理

§4.1　割点、割迹和单一半径

在本章内我们要讨论 Cheeger 有限定理. Cheeger 有限定理的证明中的关键一步是对单一半径的估计, 而单一半径的估计离不开关于割点和割迹的讨论.

定义 4.1　如果 (M^n, g) 是一个完备的 Riemann 流形, $p \in M^n$, $v \in T_pM^n$, $\|v\| = 1$. 则令

$$c_v = \sup\{t \mid d(p,\ \mathrm{Exp}_p(tv)) = t\}.$$

(1) p 点在切空间的割迹为

$$\mathscr{C}(p) = \{c_v v \mid v \in T_pM^n,\ \|v\| = 1,\ c_v < +\infty\}.$$

(2) p 点在 M^n 中的割迹为

$$\hat{C}(p) = \mathrm{Exp}_p \mathscr{C}(p).$$

我们举几个例子来说明不同流形中的点, 它们的割迹有千变万化.

例　(1) 假设 $(M^n, g) = S^n(1) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ 为单位球面, p 为南极, 则 p 在 M^n 中的割迹为北极.

(2) 若 (M^n, g) 是紧 Riemann 流形, $p \in M^n$. 则 p 在 T_pM^n 中的割迹 $\mathscr{C}(p)$ 总是同胚于 S^{n-1}.

(3) 假设 $(M^n, g) = (\mathbb{H}^n, g_{-1})$ 为 n 维实双曲空间, 截面曲率 $K \equiv -1$. 对任何 $p \in \mathbb{H}^n$, $v \in T_p\mathbb{H}^n$, 则有 $c_v = +\infty$, 从而 $\mathscr{C}(p)$ 和割迹 $\hat{C}(p)$ 均为空集.

关于割点 $q \in \hat{C}(p)$. 基本上可以分为两大类.

命题 4.2　设 $q = \sigma(t_0)$ 是点 p 沿测地线 σ 的割点, 则

(1) 或 $\sigma(t_0)$ 沿 σ 与 p 共轭;

(2) 或存在另一条不同于 σ 的测地线段 φ 连接 p 到 q 使得

$$L\left(\sigma|_{[0,t_0]}\right) = L(\varphi) = d(p, q).$$

证明 因为 $q=\sigma(t_0)$ 是沿 $\sigma|_{[0,t_0]}$ 的割点, 所以存在 $\varepsilon_i\to 0$ 及连接 p 到 $\sigma(t_0+\varepsilon_i)$ 的最短测地线 φ_i(图 11) 使得

$$L(\varphi_i)<t_0+\varepsilon_i.$$

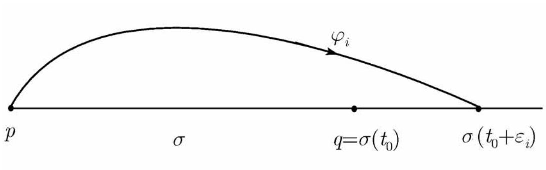


图 11

因为 q 是 p 沿 σ 的割点, 当 $t_0=d(p,q)$ 时我们注意到

$$d(p,\ \sigma(t_0+\varepsilon_i))<t_0+\varepsilon_i. \tag{4.1}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} d(p,\ \sigma(t_0+\varepsilon_i))&\geqslant d(p,\ \sigma(t_0))-\varepsilon_i\\ &=t_0-\varepsilon_i. \end{aligned} \tag{4.2}$$

取一条连 p 和 $\sigma(t_0+\varepsilon_i)$ 的最短测地线

$$\sigma_{v_i}:\ [0,\ l_i]\to M^n,$$
$$t\to \mathrm{Exp}_p(tv_i),$$

这里 $\|v_i\|=1$, $\sigma_{v_i}(l_i)=\sigma(t_0+\varepsilon_i)$,

$$d(p,\ \sigma(t_0+\varepsilon_i))=l_i. \tag{4.3}$$

由 (4.1)~(4.3) 得

$$t_0-\varepsilon_i\leqslant l_i<t_0+\varepsilon_i. \tag{4.4}$$

因此,

$$\lim_{i\to+\infty}l_i=t_0.$$

因为 S^{n-1} 是个紧集, 则存在一个子列 $v_{i_j}\to\hat{v}$.

令 $\hat{\sigma}(t)=\sigma_{\hat{v}}(t)=\mathrm{Exp}_p(t\hat{v})$, 由 (4.4) 得

$$L\left(\sigma_{\hat{v}}\big|_{[0,t_0]}\right)=L(\sigma). \tag{4.5}$$

有两种情况可能发生.

情况 1. $\hat{\sigma} \neq \sigma$. 这时命题 4.2(2) 得证.

情况 2. $\hat{\sigma} = \sigma$. 此时 $(\mathrm{Exp}_p)_*\big|_{t_0\sigma'(0)}$ 必不满秩. 否则由 Gauss 引理知当 $(\mathrm{Exp}_p)_*|_{t_0\sigma'(0)}$ 满秩时就会有

$$d(p,\ \sigma(t_0+\varepsilon)) = t_0+\varepsilon,$$

对某 $\varepsilon > 0$ 成立, 矛盾. 因此 $\sigma(t_0)$ 和 $\sigma(0)$ 沿 σ 共轭.　证毕.

接下来, 我们在割迹 $\hat{C}(p)$ 中考虑离 p 最近的点.

定义 4.3　设 (M^n, g) 是个完备的 Riemann 流形, $p \in M^n$, 则 M^n 在 p 处的单一半径定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Inj}_p(M^n) &= \inf\{c_v \mid v \in S^{n-1} \subset T_pM^n\}\\ &= \sup\{t \mid \mathrm{Exp}_p\colon B_t(O) \to M^n \text{ 是个嵌入映射}\}.\end{aligned}$$

由命题 4.2, 我们可以对单一半径作如下刻画.

引理 4.4　设 (M^n, g) 为完备的 Riemann 流形, $p \in M^n$, q 是 p 在 M^n 中的割迹中离 p 最近的点, 则下列之一成立：

(1) 或者存在一条连 p 和 q 的最短测地线 σ, 使得 p 和 q 沿 σ 共轭;

(2) 或者存在一条测地线 $\psi\colon [0, 2l] \to M^n$ 使得

$$\psi(0) = \psi(2l) = p,\ \psi(l) = q \text{ 和 } d(p,\ q) = \frac{1}{2}L(\psi).$$

证明　由命题 4.2, 我们不妨设存在两条不相同的最短测地线 $\sigma, \varphi\colon [0, l] \to M^n$ 使 $L(\varphi) = L(\sigma) = d(p,\ q)$. 我们只需证明

$$\varphi'(l) = -\sigma'(l). \tag{4.6}$$

反设 $\varphi'(l) \neq -\sigma'(l)$, 我们将导出一个矛盾. 事实上, 当 $\varphi'(l) \neq -\sigma'(l)$ 时, 我们可以找出 $w \in T_qM^n$, $w \neq 0$ 使得

$$\begin{cases} \langle w,\ -\sigma'(l)\rangle > 0, \\ \langle w,\ -\varphi'(l)\rangle > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

令 $\alpha(s) = \mathrm{Exp}_q(sw)$, 因为 p 和 q 不沿 σ 和 φ 共轭, $(\mathrm{Exp}_p)_*|_{l\sigma'(0)}$ 和 $(\mathrm{Exp}_p)_*|_{l\varphi'(0)}$ 都是满秩线性变换, 由反函数定理, 分别存在两族测地线段 $\{\sigma_s\}$ 和 $\{\varphi_s\}$, 使得 $\sigma_0 = \sigma$, $\varphi_0 = \varphi$, 这里 σ_s 和 φ_s 是两条不同的连 p 和 $\alpha(s)$ 的测地线段 (图 12). 利用第一变分公式和 (4.7) 得出

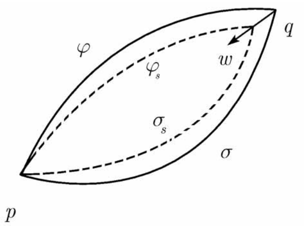


图 12

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}L(\sigma_s)\Big|_{s=0} < 0, \\ \dfrac{d}{ds}L(\varphi_s)\Big|_{s=0} < 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

从而

$$\max\{L(\sigma_s),\ L(\varphi_s)\} < l \tag{4.9}$$

对充分小的 $s > 0$ 成立. 不妨设 $L(\varphi_s) \leqslant L(\sigma_s)$, 由割点的定义, σ_s 必有 p 的一个割点 $\hat{q}_s$, 且使得

$$d(p,\ \hat{q}_s) \leqslant \max\{L(\sigma_s),\ L(\varphi_s)\} < l.$$

对充分小的 $s > 0$ 成立, 这和我们的假设 $q = \alpha(0)$ 是离 p 最近的割点矛盾.　证毕.

如 (M^n, g) 是个完备 Riemann 流形, 我们定义 M^n 的单一半径为

$$\mathrm{Inj}(M^n) = \mathrm{Inj}(M^n,\ g) = \inf_{p \in M^n}\{\mathrm{Inj}_p(M^n)\}.$$

令

$$l(M^n,\ g) = \inf\{L(\psi) \mid \psi\colon S^1 \to M^n, \psi'(0) \neq 0,\ \nabla_{\psi'}\psi' \equiv 0\}.$$

Klingenberg 用引理 4.4 对单一半径得到如下定理.

定理 4.5 (Klingenberg)　若 (M^n, g) 是个紧 Riemann 流形, 满足 $K_{M^n} \leqslant K_0$, 则 (M^n, g) 的单一半径有下界：

$$\mathrm{Inj}(M^n,\ g) \geqslant \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{|K_0|}},\ \frac{1}{2}l(M^n,\ g)\right\}.$$

证明　因为 M^n 紧, 可选取 $p_0 \in M^n$ 使得

$$\mathrm{Inj}_{p_0}(M^n) = \mathrm{Inj}(M^n).$$

这里我们用了下列事实：

$$c\colon SM^n \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\},$$

$$(p,v)\to c_{p,v}$$

是 SM^n 上的连续函数, 这里 $SM^n=\{(p,\ v)\mid p\in M^n,\ v\in T_pM^n,\ \|v\|=1\}$, $c_{p,v}=\sup\{t\mid d(p,\mathrm{Exp}_p(tv))=t\}$. 由 $c_{p,v}$ 的连续性, 我们可选取 $q_0\in\hat{C}(p_0)$ 使得

$$d(p_0,\ q_0)=\mathrm{Inj}_{p_0}(M^n).$$

应用引理 4.4 于 $\{p_0,q_0\}$ 得出

(i) 或者 p_0 和 q_0 沿某条最短测地线共轭.

(ii) 或者存在经过 p_0 和 q_0 的一条光滑闭测地线

$$\psi\colon S^1\to M^n,$$

使得

$$\frac{1}{2}L(\psi)=d(p_0,\ q_0).$$

当情况 (i) 出现时, 由 Rauch 比较定理 (因为 $K_{M^n}\leqslant K_0$) 共轭点不会在 $0\leqslant t<\dfrac{\pi}{\sqrt{|K_0|}}$ 时出现, 从而

$$d(p_0,\ q_0)\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{|K_0|}}.$$

总之, 我们有

$$\mathrm{Inj}(M^n)\geqslant d(p_0,\ q_0)\geqslant\min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{|K_0|}},\ \frac{1}{2}L(\psi)\right\}.$$

证毕.

§4.2 Cheeger 的单一半径估计

单一半径的估计在有限定理的证明中起着举足轻重的作用. 由定理 4.5 看出紧流形单一半径的估计依赖于对 Riemann 流形中闭测地线长度的研究.

为此, 我们简单描述一下沿闭测地线上的 Fermi 坐标. 设

$$\sigma\colon S^1\to M^n,$$
$$t\to\sigma(t)$$

为 M^n 中的一条光滑闭测地线. M^n 在 $\sigma(t)$ 处的法空间为

$$N_{\sigma(t)}M^n=\{\xi\in T_{\sigma(t)}M^n\mid\langle\xi,\ \sigma'(t)\rangle=0\},$$

相应的法向量丛为

$$N_\sigma M^n = \bigcup_{t\in S^1} N_{\sigma(t)}M^n.$$

此时 Fermi 考虑下列映射

$$F\colon N_\sigma M^n \to M^n,$$

$$(\sigma(t),\xi) \to \mathrm{Exp}_{\sigma(t)}\xi.$$

可以证明, 当 $\|\xi\|$ 充分小时, $F_*|_{(\sigma(t),\xi)}$ 是个满秩的线性变换. 令

$$D_\varepsilon(\sigma) = \left\{(\sigma(t),\xi)\in N_\sigma M^n \mid t\in S^1,\ \|\xi\|<\varepsilon\right\},$$

则 $F\colon D_\varepsilon(\sigma)\to M^n$ 是一个嵌入映射, 称为沿 σ 的 Fermi 坐标系.

引进 Fermi 坐标系的动机起始于下列事实.

命题 4.6 设 Σ^k 是完备 Riemann 流形 (M^n,g) 中的一个紧致光滑子流形, $q\notin\Sigma^k$, $\varphi\colon[0,b]\to M^n$ 是连接 Σ^k 到 q 的最短测地线, 则

$$\langle\varphi'(0),\ w\rangle\equiv 0 \tag{4.10}$$

对所有 $w\in T_{\varphi(0)}\Sigma^k$ 成立.

证明 令

$$\beta\colon[0,\ b]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M^n,$$

$$(t,\ s)\to\beta(t,\ s)$$

为一族曲线, 满足 $\beta(0,s)\in\Sigma^k$, $\beta(b,s)\equiv q$, $\beta(t,0)=\varphi(t)$, $V(t)=\dfrac{\partial\beta}{\partial s}(t,0)$, 则因为 φ 是连接 Σ^k 和 q 的最短曲线, 应用第一变分公式得

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds}[L(\beta(\cdot,s))]\Big|_{s=0} = \int_0^b \frac{1}{\|\varphi'(0)\|}\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle V(t),\ \varphi'(t)\rangle - \langle V,\ \nabla_{\varphi'}\varphi'\rangle\right]dt\\ &= \frac{1}{\|\varphi'(0)\|}[\langle V(b),\ \varphi'(b)\rangle - \langle V(0),\ \varphi'(0)\rangle]\\ &= -\frac{\langle V(0),\ \varphi'(0)\rangle}{\|\varphi'(0)\|},\end{aligned}$$

从而

$$\langle\varphi'(0),\ V(0)\rangle\equiv 0$$

对所有 $V(0)\in T_{\sigma(0)}\Sigma^k$ 成立. 证毕.

由命题 4.6 推出, 对于完备 Riemann 流形 (M^n, g), Fermi 映射

$$F\colon N_\sigma M^n \to M^n$$

是个满映射. 用 Fermi 映射和比较定理, 我们有下列关于闭测地线长度的估计.

定理 4.7 (Cheeger, Heintze-Karcher) 设 (M^n, g) 是个完备 Riemann 流形, 满足 $K_{M^n} \geqslant -1$. $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leqslant d_0$ 和 $\mathrm{vol}(M^n, g) \geqslant C_0$, 则对 M^n 中任何一条非平凡的闭测地线 σ 都有

$$L(\sigma) \geqslant \frac{C_0}{a_n(\sin\mathrm{h} d_0)^{n-1}}, \tag{4.11}$$

这里 $a_n = \mathrm{vol}_{n-2}(S^{n-2}(1))$.

证明 令 $D_{d_0}(\sigma) = \{(\sigma(t), \xi) \mid t \in S^1,\ \|\xi\| \leqslant d_0\}$. 因为 $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leqslant d_0$, 应用命题 4.6 得出 Fermi 映射

$$F\colon D_{d_0}(\sigma) \to M^n$$

是个满映射. 因为 $K_{M^n} \geqslant -1$, 我们可以对沿法向测地线 $\varphi_\xi(t) = \mathrm{Exp}_{\sigma(s)}(t\xi)$ 的 Jacobi 场有如下估计. 固定 $s \in S^1$, ξ 满足 $\|\xi\| = 1$, J 是沿 φ 的 Jacobi 场.

(i) 当 $\|J'(0)\| = 0$, $\|J(0)\| = 1$ 时, 因 $K_{M^n} \geqslant -1$, 由第二比较定理 (定理 2.6) 我们得出

$$\|J(t)\| \leqslant \mathrm{cosh} t. \tag{4.12}$$

(ii) 当 $J(0) = 0$, $\|J'(0)\| = 1$ 时, 因 $K_{M^n} \geqslant -1$, 由定理 2.8 得出

$$\|J(t)\| \leqslant \mathrm{sinh} t. \tag{4.13}$$

由 (4.12)~(4.13) 得出

$$\det(F_*)|_{(\sigma(s), t\xi)} \leqslant (\mathrm{cosh} t) \cdot (\mathrm{sinh} t)^{n-2},$$

这里 $s \in S^1$, $t\xi \in B^{n-1}_{d_0}(O) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x| < d_0\}$, 从而

$$\begin{aligned} C_0 \leqslant \mathrm{vol}(M^n, g) &\leqslant \int_{\sigma(s)\in\sigma} \int_{t=0}^{d_0} \int_{\xi \in S^{n-2}(1)} \det(F_*) dt ds d\xi \\ &\leqslant L(\sigma) \int_0^{d_0} a_n (\mathrm{sinh} t)^{n-2} \mathrm{cosh} t dt \\ &\leqslant L(\sigma) a_n (\mathrm{sinh} d_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

证毕.

上述结果有一个直接推论：

推论 4.8 (Cheeger)　假设 (M^n, g) 是个光滑 Riemann 流形, 满足 $|K_{M^n}| \leqslant 1$, $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leqslant d_0$, $\mathrm{vol}(M^n, g) \geqslant C_0$, 则 (M^n, g) 的单一半径满足

$$\mathrm{Inj}(M^n) \geqslant \min\left\{\pi,\ \frac{C_0}{2a_n(\sinh d_0)^{n-1}}\right\}, \tag{4.14}$$

这里 $a_n = \mathrm{vol}_{n-2}(S^{n-2}(1))$.

证明　设 $p_0 \in M^n$ 满足 $\mathrm{Inj}_{p_0}(M^n) = \mathrm{Inj}(M^n)$. 取 $q_0 \in \hat{C}(p_0)$ 使得 $d(p_0, q_0) = \mathrm{Inj}_{p_0}(M^n)$. 则

(1) 或有 p_0 和 q_0 沿某条最短测地线共轭, 此时因为 $K_{M^n} \leqslant 1$, 由 Rauch 比较定理 2.5, 必有

$$d(p_0,\ q_0) \geqslant \pi.$$

(2) 或有一条闭测地 σ 经 p_0 和 q_0 使得

$$\frac{1}{2}L(\sigma) = d(p_0,\ q_0).$$

此时由定理 4.7 得 (因为 $K \geqslant -1$)

$$L(\sigma) \geqslant \frac{C_0}{a_n(\sinh d_0)^{n-1}}.$$

证毕.

§4.3　重心和流形中的离散图

我们在下一节中将讨论 Cheeger 有限定理, 而有限定理的提出和下面的事实息息相关.

令 Γ 是无向连通图, 我们记

$$|\Gamma| = \text{图 } \Gamma \text{ 中的顶点数}.$$

命题 4.9　设 $G(k_0) = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是个图},\ |\Gamma| \leqslant k_0\}$, 则 $G(k_0)$ 只有有限个同构类.

为了得到有关 Riemann 流形模空间的有限性定理, 我们考虑流形中的离散图.

定义 4.10　设 (M^n, g) 为完备的 Riemann 流形, $\delta > 0$, 则

(1) 当 $\{p_1, \cdots, p_k\} \subset M^n$ 满足

$$d(p_i,\ p_j) > \delta, \quad i \neq j, \tag{4.15}$$

$\{p_1, \cdots, p_k\}$ 称为 M^n 中的一个 δ 离散集.

(2) 如 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 是 M^n 中的 δ 离散集, 且任何包含 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 的 δ 离散集都等于 $\{p_1, \cdots, p_k\}$, 则称 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 为 M^n 中一个最大的 δ 离散集.

为了讨论流形中的离散集和单一半径间的关系, 我们作下列观察.

引理 4.11　设 (M^n, g) 为一个完备的 Riemann 流形, $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 为 M^n 中的最大 δ 离散集, $\delta < \mathrm{Inj}(M^n)$ 和 $\mathrm{vol}(M^n, g) \leqslant W_0$. 则必有

$$k \leqslant \frac{W_0}{b_n \delta^n},$$

这里 b_n 是仅依赖于 $n = \mathrm{dim} M^n$ 的常数.

证明　因为 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 是 δ 离散集, 所以当 $i \neq j$ 时,

$$d(p_i,\ p_j) > \delta,$$

从而

$$B_{\frac{\delta}{2}}(p_i) \bigcap B_{\frac{\delta}{2}}(p_j) = \varnothing,$$

$$W_0 \geqslant \mathrm{vol}(M^n) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}\left[B_{\frac{\delta}{2}}(p_i)\right]. \tag{4.16}$$

由 Croke 的一个定理 (见 [Cr3]), 我们进一步得出, 只要 $r \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{Inj}(M^n)$ 就有

$$\mathrm{vol}[B_r(p)] \geqslant \hat{b}_n r^n, \tag{4.17}$$

这里 $\hat{b}_n$ 为只依赖于 n 的常数. 因此由 (4.16)~(4.17) 导出

$$k\hat{b}_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}\left[B_{\frac{\delta}{2}}(p_i)\right] \leqslant W_0.$$

证毕.

当 $\mathrm{Inj}(M^n) > \delta$, $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 为 (M^n, g) 中一个最大的 δ 离散集. 我们可以构造一个相应的图 $\varGamma = \Gamma_{(M^n, g)}$ 使得

(1) $\varGamma$ 的顶点集为 $\{p_1, \cdots, p_k\}$;

(2) 如 $d(p_i, p_j) < 2\delta, i \neq j$, 则 p_i 和 p_j 间用一条边相连.

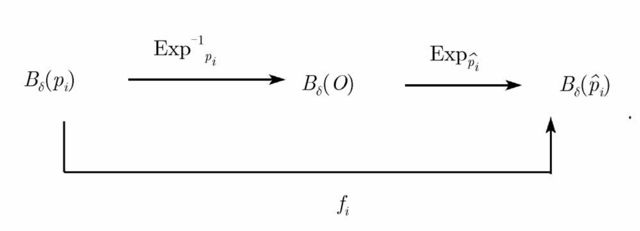
现在我们考虑两个 Riemann 流形 (M^n, g) 和 $(\hat{M}^n, \hat{g})$, $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 和 $\{\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_k\}$ 分别为 (M^n, g) 和 $(\hat{M}^n, \hat{g})$ 中的最大 δ 离散集. 则由最大性得

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} B_\delta(p_i) \text{ 和 } \hat{M}^n = \bigcup_{i=1}^{k} B_\delta(\hat{p}_i).$$

假设 $\mathrm{Inj}(M^n) > \delta$ 和 $\mathrm{Inj}(M^n) > \delta$, 则我们可以构造一族局部微分同胚：

$$f_i\colon B_\delta(p_i) \to B_\delta(\hat{p}_i)$$

满足 $f_i = \mathrm{Exp}_{\hat{p}_i} \circ \mathrm{Exp}_{p_i}^{-1}$, 如下表示：



我们想用这一族 $\{f_i\}$ 局部微分同胚来构造一个整体的光滑映射

$$f\colon M^n \to \hat{M}^n.$$

可是我们首先碰到下面一个问题：当 $p \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_\delta(p_{i_j})$ 时, 像集 $\{f_{i_1}(p), \cdots, f_{i_m}(p)\}$ 不一定是 $\hat{M}^n$ 中单点集. 为了克服这一困难, 我们引进重心的概念.

定义 4.12　设 (M^n, g) 为完备的 Riemann 流形. 则

(1) 一个集合 $\Omega \subset M^n$ 如满足对任何 $p, q \in \Omega$ 存在唯一的连接 p 和 q 的最短测地线段 δ_{pq} 且 $\delta_{pq} \subset \Omega$, 则 Ω 称为 (M^n, g) 中的强凸集.

(2) 设 $\{q_1, \cdots, q_m\} \subset \Omega$, Ω 为 (M^n, g) 中的一个强凸集, 如果存在 $y \in \Omega$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_y^{-1} q_i = 0,$$

则称 y 为 $\{q_1, \cdots, q_m\}$ 在 M^n 中的重心.

我们可以举几个关于重心的例子.

例　(i) 设 $\sigma\colon [0, l] \to M^n$ 是 (M^n, g) 中的最短测地线段满足 $d(\sigma(t), \sigma(0)) = t$, $q_0 = \sigma(0)$, $q_1 = \sigma(l)$, 则 $y = \sigma\left(\dfrac{l}{2}\right)$ 是 $\{q_0, q_1)$ 的重心 (见图 13).

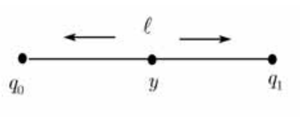


图 13

这是因为

$$\begin{cases} \mathrm{Exp}_y^{-1} q_0 = -\dfrac{l}{2}\sigma'\left(\dfrac{l}{2}\right), \\ \mathrm{Exp}_y^{-1} q_1 = \dfrac{l}{2}\sigma'\left(\dfrac{l}{2}\right). \end{cases}$$

(ii) 设 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 为欧氏平面 $(\mathbb{R}^2, g_0)$ 中一个等边三角形的顶点, y 为此等边三角形的中心, 则 y 是 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 的重心 (见图 14).

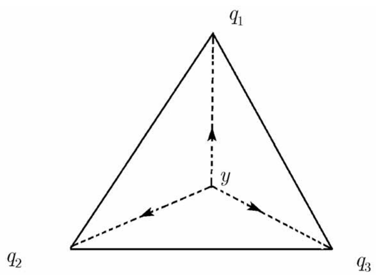


图 14

下面的引理, 对研究重心极为有用.

引理 4.13 (Whitehead)　设(M^n, g)为一个完备的 Riemann 流形满足$K_{M^n} \leqslant 1$, $r < \frac{1}{2}\min\{\pi,\ \mathrm{Inj}(M^n)\}$. 则

(1) $B_r(p)$ 是 M^n 中的一个强凸集;

(2) 对任何 $\{q_1, \cdots, q_m\} \subset B_r(p)$, 都存在唯一的重心 $y \in B_r(p)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_y^{-1} q_i = 0.$$

证明　结论 (1) 见 [ChE]p103.

关于结论 (2), 考虑能量函数:

$$E(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}[d(q,\ q_i)]^2.$$

简单的计算表明

$$\nabla E(q) = -\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_q^{-1} q_i.$$

因为 $K_{M^n} \leqslant 1$, $d(q, q_i) < 2r \leqslant \pi$ 当 $q \in B_r(p)$ 时成立, 由比较定理知, $B_r(p)$ 中无 q_i 的共轭点, 从而

$$q \to [d(q,\ q_i)]^2$$

是 $B_r(p)$ 上的一个凸函数. $E(q)$ 也是 $q \in B_r(p)$ 的凸函数. 因此 E 在 $B_r(p)$ 有唯一的临界点 y.　证毕.

§4.4 Cheeger 有限定理

1970 年 Cheeger 给出了下面的著名的有限定理.

定理 4.14 给定 $n, d_0, C_0 > 0$, 设

$$\mathfrak{M}(n,\ d_0,\ C_0) = \left\{(M^n,\ g) \mid |K_{M^n}| \leqslant 1,\ \mathrm{Diam}(M^n) \leqslant d_0,\ \mathrm{vol}(M^n) \geqslant C_0\right\}.$$

则模空间 $\mathfrak{M}(n, d_0, C_0)$ 只有有限个微分同胚类.

证明 我们这里简要地勾划一下定理证明的思路, 详见 [Pe]. 定理的证明一共分五步. 以下设 $(M^n, g) \in \mathfrak{M}(n, d_0, C_0)$.

第一步. 体积估计.

因为 $K \geqslant -1$, 则有 $\mathrm{Ric}(M^n) \geqslant -(n-1)$, 由 Gromov-Bishop 比较定理得

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(M^n,\ g) &\leqslant \mathrm{vol}(B_{d_0}(p)) \\ &\leqslant \hat{a}_n \int_0^{d_0} (\sinh s)^{n-1} ds = W_0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

第二步. 单一半径的估计.

$$\mathrm{Inj}(M^n) \geqslant \min\left\{\pi,\ \frac{C_0}{2a_n(\sinh d_0)^{n-1}}\right\} = \delta_n. \tag{4.19}$$

第三步. 流形 M^n 的 δ 离散集和图.

设 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 为 (M^n, g) 中的最大 δ 离散集, $0 < \delta < \delta_n$. 则由引理 4.11 得

$$k \leqslant k_0 = \frac{W_0}{b_n \delta^n}. \tag{4.20}$$

令 Γ_{M^n} 为相应的离散图.

$$p_i \text{ 和 } p_j \text{ 右边相连} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } i \neq j, \\ \text{(ii) } d(p_i,\ p_j) < 2\delta. \end{cases}$$

考虑

$$G(k_0) = \left\{\mathit{\Gamma} \mid |\mathit{\Gamma}| \leqslant k_0\right\}.$$

第四步. 局部微分同胚的构造.

上述讨论说明, 我们如选取 $\delta < \delta_n$, 就可构造一个映射

$$\mathfrak{M}(n,\ d_0,\ C_0) \to G(k_0),$$

$$M^n \to \Gamma_{M^n}.$$

假设 $\mathfrak{M}(n,\ d_0,\ C_0)$ 中有两个 Riemann 流形 (M^n,g) 和 $(\hat{M}^n,\hat{g})$ 使得 Γ_{M^n} 和 $\Gamma_{\hat{M}^n}$ 同构. 如果 $|\Gamma_{M^n}|=|\Gamma_{\hat{M}n}|=k\leqslant k_0$, 我们构造一族局部微分同胚 $\{f_i\}_{i=1}^k$:

$$f_i\colon B_\delta(p_i)\to B_\delta(\hat{p}_i),$$

$$q\to(\mathrm{Exp}_{\hat{p}_i}\circ\mathrm{Exp}_{p_i}^{-1})(q).$$

第五步. 整体微分同胚的构造.

当 $\delta<\dfrac{1}{4}\min\{\pi,\ J_n\}$ 时, 我们由引理 4.13 知 $B_{2\delta}(x)$ 是个强凸集. 如果 $p\in\bigcap\limits_{j=1}^{m}B_\delta(p_{i_j})$, $m\leqslant k_0$, 则由 $\{f_i\}$ 的定义知

$$\{f_{i_1}(p),\cdots,f_{i_m}(p)\}\subset B_{2\delta}(f_{i_1}(p)).$$

因为 $B_{2\delta}(f_{i_1}(p))$ 是个强凸集, 所以由引理 4.13 知, 存在唯一的 $\{f_{i_1}(p),\cdots,f_{i_m}(p)\}$ 的重心 y_0.

从上述讨论看出, 我们可以定义整体光滑映射:

$$f\colon M^n\to\hat{M}^n,$$

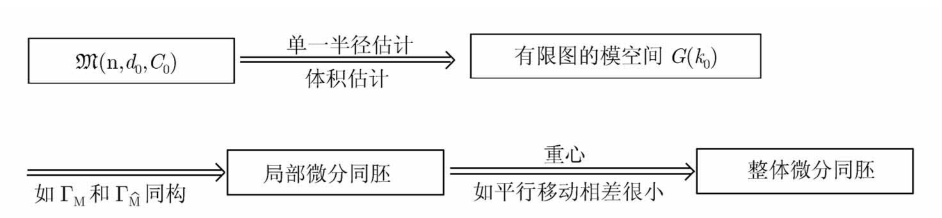
$$p\to\{f_{i_1}(p),\cdots,f_{i_m}(p)\}\ \text{的重心}.$$

令 P_{xy} 为 σ_{xy} 上的平行移动, 这里 $d(x,y)<\delta$, σ_{xy} 为连 x 到 y 的最短测地线. S. Peters 于 1988 年证明了, 如 $P_{p_ip_j}$ 和 $P_{\hat{p}_i\hat{p}_j}$ 作为 $SO(n)$ 的元素相差“很小”时, 则上述定义的整体光滑映射:

$$f\colon M^n\to\hat{M}^n$$

必是整体微分同胚.

这里我们对上述证明作小结如下:



证毕.

注　Cheeger 有限定理已被 Grove, Petersen 和吴志杨推广如下: 令 $\hat{\mathfrak{M}}(n,d_0,C_0)=\{(M^n,g)\mid K_{M^n}\geqslant-1,\ \ \mathrm{Diam}(M^n,g)\leqslant d_0,\mathrm{vol}(M^n,g)\geqslant C_0\}$, 当 $n\geqslant5$ 时 $\hat{\mathfrak{M}}(n,d_0,C_0)$ 仅有有限多个微分同胚类.

习　题　四

1(单一半径内的体积估计, Croke 1980). 假设 (M^n, g) 是个完备的 Riemann 流形, 并假设它的单一半径满足不等式 $\inf\limits_{x\in M^n}\left\{\mathrm{Inj}_{(M^n,g)}(x)\right\}\geqslant\delta_0$. Croke 用 Santalo 公式, Berger-Kazdan 不等式和 Schwarz 不等式, 证明了：当 $0\leqslant r\leqslant\delta_0$ 时, 不等式

$$\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_r(p))}{[\mathrm{vol}_n(B_r(p))]^{\frac{n-1}{n}}}\geqslant C_n^*$$

成立, 这里 C_n^* 是只依赖于维数 $n=\dim M^n$ 的常数.

(i) 找出 $\dfrac{d}{dr}[\mathrm{vol}_n(B_r(p))]$ 的一个下界, 这里 $0\leqslant r\leqslant\delta_0$.

(ii) 当 $0\leqslant r\leqslant\delta_0$, 找出 $\mathrm{vol}_n(B_r(p))$ 的一个下界.

2(Yamaguchi 有限定理 1989). 假设 (M^n, g) 是个紧 Riemann 流形.

(i) 如果 $\mathrm{Inj}(M^n,g)\geqslant\delta_0$ 且 $\mathrm{vol}(M^n)\leqslant v_0$, $\{p_1,\cdots,p_k\}$ 为 (M^n,g) 中 δ_0 离散图, 找出 k 的一个上界.

(ii) 假设 $\mathrm{Inj}(M_i^n,g_i)\geqslant\delta_0$ 和 $\mathrm{vol}(M_i^n,g_i)\leqslant v_0$, 再假设 (M_1^n,g_1) 和 (M_2^n,g_2) 有相同的 $\dfrac{\delta_0}{8}$ 离散图 $\Gamma_1\cong\Gamma_2$. 用重心的方法构造一个同伦等价映射 φ：$M_1^n\to M_2^n$.

(iii) 令

$$\mathfrak{M}(n,\bar\delta,\bar v)=\{(M^n,g)\mid \mathrm{Inj}(M^n,g)\geqslant\bar\delta,\ \mathrm{vol}(M^n,\ g)\leqslant\bar v\}.$$

用 (ii) 的结果导出 $\mathfrak{M}(n,\bar\delta,\bar v)$ 只有有限个同伦等价类.

3. 假设 f：$(M_1^n,g_1)\to(M_2^n,g_2)$ 是个微分同胚, 令映射 f 的 Lipschitz 常数为

$$L(f)=\max_{\substack{v\in TM_1^n\\ \|v\|\neq0}}\left\{\frac{\|f_*v\|_{g_2}}{\|v\|_{g_1}}\right\}.$$

定义两个 Riemann 流形间的距离为

$$d(M_1^n,g_1),(M_2^n,g_2)=\inf_f\{\log[L(f)]+\log[L(f^{-1})]\}.$$

(i) 令 $T^2=S^1\times S^1$ 为 2 维环面, 模空间

$$\mathfrak{M}(T^2,\ A_0)=\{(T^2,\ g)\mid \mathrm{Area}(T^2,\ g)\leqslant A_0, K_g\equiv0\}.$$

举例说明 $\mathfrak{M}(T^2,\ A_0)$ 是个非紧的模空间.

(ii) 考虑另一个模空间

$$\mathfrak{N}(T^2,\ D_0)=\{(T^2,\ g)\mid \mathrm{Diam}(T^2,g)\leqslant D_0,\ K_g\equiv0\},$$

举例说明模空间 $\mathfrak{N}(T^2,\ D_0)$ 非紧.

4(Mumford 有限定理). 我们考虑 Cheeger 有限定理的非常特殊的情形, 假设 Σ_k^2 是紧可定向的、亏格为 k 的曲面, 考虑

$$\mathfrak{M}\left(\Sigma_k^2,\ l_0\right)=\left\{\left(\Sigma_k^2,\ g\right)\ \mid K_g\equiv-1,\ l(\Sigma_k^2,\ g)\geqslant l_0\right\},$$

这里 $l(\Sigma_k^2, g)$ 表示 (Σ_k^2, g) 中最短测地线的长度.

(i) 如果 $l(M^n, g) \geqslant l_0$ 和 $K_g \leqslant 0$, 找出 (M^n, g) 的单一半径的一个下界.

(ii) 回忆一下两个 Riemann 流形间的距离由习题 3 给出. 固定亏格 k 和假设 $K_g \equiv -1$, 计算 (Σ_k^2, g) 的面积. 问模空间 $\mathfrak{M}(\Sigma_k^2, l)$ 是否是紧的? (提示：用 Cheeger 有限定理的证明方法.)

5(一族曲率无下界的曲面). 我们将举例说明当 $K_{(M_i^n, g_i)} \to -\infty$ 时, 尽管仍假设 $\mathrm{vol}(M_i^n, g_i) \geqslant v_0$ 和 $\mathrm{Diam}(M_i^n, g_i) \leqslant D_0$, 但 Cheeger 有限定理的结论就不再成立.

取 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行的单位圆盘, 两者相距为 2, 严格地说, 我们取一族 3 维邻域 Ω_k. 令 $\Sigma_k^2 = \partial\Omega_k$, 这样一族 Ω_k 构造如下：令 $p_i = \left(\dfrac{1}{2i}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$, $D_\varepsilon(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), p) < \varepsilon\}$. 取

$$\hat{\Sigma}_k^2 = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ (x, y) \notin \bigcup_{i=1}^{k} B_{\left(\frac{1}{16}\right)^i}(p_i)\right\}$$

和 $\hat{\Omega}_k = \hat{\Sigma}_k^2 \times [0, 1]$, 取 $\widehat{\Omega}_k$ 中的一个子集 Ω_k 满足

(i) $\Sigma_k^2 = \partial\Omega_k$ 光滑且 Σ_k^2 同胚于 $\partial\hat{\Omega}_k$,

(ii) $\hat{\Omega}_k$ 可形变收缩至 Ω_k.

(1) 是否可选取适当的 Ω_k 使得 $K_{\partial\Omega_k} = K_{\Sigma_k^2} \leqslant 0$?

(2) 试说明 $\mathrm{Diam}(\Sigma_k^2) \leqslant 2 + 4\pi$.

(3) 为什么 $\mathrm{Area}(\Sigma_k^2)$ 有个一致的下界?

(4) 当 $j \neq k$ 时, Σ_k^2 和 Σ_j^2 会同胚吗?

6. 构造 $\mathbb{R}^3$ 中的一族曲面 $\{\Sigma_k^2\}_{k\geqslant 1}$ 满足 $\left|K_{\Sigma_i^2}\right| \leqslant 1$. $\mathrm{Area}(\Sigma_i^2) \geqslant v_0$ 和 $\mathrm{Diam}(\Sigma_i^2) \to +\infty$, 但是当 $k \neq j$ 时, Σ_k^2 和 Σ_j^2 不同胚.

7(镜空间系列). 令 $\mathbb{Z}_k = \left\{ \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\frac{j}{k}2\pi} \,\middle|\, j = 0, 1, \cdots, k \right\}$.

(i) 说明对任何 $\lambda \in \mathbb{Z}_k$, 映射

$$\varphi_\lambda\colon S^3(1) \to S^3(1),$$

$$(z_1, z_2) \to (\lambda z_1, \lambda z_2)$$

是等距映射.

(ii) 找出流形 $M_k^3 = S^3(1)/\mathbb{Z}_k$ 的基本群.

(iii) 说明 $\mathrm{Diam}(M_k^3) \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

(iv) 试问 $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{vol}(M_k^3) = 0$ 是否成立?

(v) 这一族三维流形 $\{M_k^3\}_{k\geqslant 1}$ 是否和 Cheeger 有限定理矛盾?

第二部分

现代理论选讲

本书的第二部分主要选讲 Riemann 几何近 20 年来研究中的几个方向. 就曲率符号来分, 我们分别用一章的篇幅讨论负曲率流形和正曲率流形, 另外一章则讨论测地流. 每章的结尾都列出部分相关的未解决问题供读者研究参考.

这部分可供高年级研究生课选讲和数学工作者参考使用, 有时由于新定理的证明比较复杂, 为节省篇幅我们只提供一个大概思路, 有兴趣的读者可以参见具体文献.

第五章　Riemann 流形上的测地流

我们已从本书的第一部分看到, 对测地线的研究在现代 Riemann 几何研究中起了举足轻重的作用. Riemann 几何中的俄国学派近 30 年来一直用测地三角形的比较来作为现代度量几何基础, 例如所谓的 Alexandroff 空间就是用测地三角形定义的.

在本章第一节中我们将从动力系统的角度讨论 Riemann 流形中的测地线. 动力系统和 Riemann 几何的结合给现代数学带来极其丰富的成果, 其中包括 Birkhoff 定理, Morse 理论和 Anosov 双曲理论. 我们首先从测地流的基本性质开始.

§5.1　测地流和切丛上的辛结构

我们首先回忆一下测地线和指数映射的关系. 假设 (M^n, g) 是个完备的 Riemann 流形, $p \in M^n$ 和 $v \in T_pM^{n'}$ 我们知道曲线 $\sigma(t) = \mathrm{Exp}_p(tv)$ 是一条满足 $\sigma(0) = p$ 和 $\sigma'(0) = v$ 的测地线. 从而我们定义测地流

$$\begin{aligned}\phi_t\text{：}\quad & TM \to TM \\ & (p, v) \to \left(\mathrm{Exp}_p(tv), \frac{d}{dt}[\mathrm{Exp}_p(tv)]\right).\end{aligned}$$

由测地线的唯一性, 可以证明 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个单参数子群, 即 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 有如下性质：

$$\begin{cases} \phi_{s+t}(p, v) = (\phi_s \circ \phi_t)(p, v), \\ \phi_s^{-1} = \phi_{-s}. \end{cases}$$

我们已经指出 $\dfrac{d}{dt}(\|\sigma'(t)\|^2) = 2\langle\sigma'(t), \nabla_{\sigma'}\sigma'\rangle \equiv 0$, 所以, 如记单位切丛

$$SM^n = \{(p, v) \in TM| \quad \|v\| = 1, p \in M\},$$

则测地流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 把单位向量映为单位向量, 从而也是子流形 SM^n 上的流：

$$\phi_t\text{：} SM^n \to SM^n.$$

本节的一个主要目的是要证明 TM^n 和 SM^n 有个自然 Riemann 度量, 即 TM^n 具有和 (M^n, g) 相应的度量 G. 更进一步我们要证明 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 保持 (TM^n, G) 的体积元不变. 为此, 我们先讨论 (TM^n, G) 的几何结构.

5.1.1 双切丛上的经典度量

如果 M^n 是 n 维光滑流形, 则 M^n 的切丛 TM^n 是 $2n$ 维的光滑流形. 如果我们更进一步假设 (M^n, g) 是个 Riemann 流形, 则 TM^n 上有个由 g 诱导的度量 G. 这样的度量 G 可以描述如下：

首先我们由经典的投影映射说起,

$$\begin{aligned} \pi: \quad & TM^n \to M^n, \\ & (p, v) \to p. \end{aligned}$$

很显然, 投影映射的导数 π_*: $T(TM^n) \to TM^n$ 是个满映射, 这里 $T(TM^n)$ 是 TM^n 的切向量丛. 对每一个元素 $(p, v) \in TM^n$, $\ker\pi_*|_{(p,v)}$ 的维数为 $\{\dim[T_{(p,\ v)}(TM^n)] -\dim[T_pM^n]\} = 2n - n = n$. 有很多方法取 $\ker\pi_*$ 的补空间. 当 (M^n, g) 是 Riemann 流形时, 我们选取所谓的 T_pM^n 在 $T_{(p,v)}(TM^n)$ 的水平提升, 简记为 $\mathcal{H}_{(p,v)}$. 这样的水平提升可以描述如下：

取 $\{w_1, \cdots, w_n\}$ 为 T_pM^n 的一组单位正交基, 令 $\sigma_i(t) = \mathrm{Exp}_p(tw_i)$ 为一条测地线, $\{u_1(t), \cdots, u_1(t)\}$ 为沿测地线 σ_i 以 $u_i(0) = v$ 为初值的平行向量场. 令

$$\xi_i = \frac{d}{dt}(\sigma_i(t), u_i(t))|_{t=0} = (w_i, u_i'(0)).$$

则 $\mathcal{H}_{(p,v)}$ 是 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 张成的子空间. 从而双切丛 $T(TM^n)$ 在 (p, v) 处有如下正交分解

$$T_{(p,v)}(TM^n) = \ker\pi_*\Big|_{(p,v)} \oplus \mathcal{H}_{(p,v)}.$$

很显然 $\ker\pi_*\Big|_{(p,v)}$ 同构于 $T_pM^n \cong \mathbb{R}^n$. 所以对 $T_{(p,v)}(TM^n)$ 中的任何一个元素 w, 我们记 w^v 为 w 在 $\ker\pi_*\Big|_{(p,v)}$ 的投影, 并记 $w^{\mathcal{H}}$ 为 w 在 $\mathcal{H}_{(p,v)}$ 的投影. 则 g 诱导的度量 G 由下列公式给定：

$$\langle u, w\rangle_G = \langle u^v, w^v\rangle_g + \langle \pi_* u, \pi_* w\rangle_g.$$

下面我们将 $T_{(p,v)}(TM^n) = \ker\pi_*\Big|_{(p,v)} \oplus \mathcal{H}_{(p,v)}$ 的分解用局部坐标写出：假设 M^n 在 p 处的局部坐标系为 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 为 Riemann 流形 (M^n, g) 相对于 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ 的 Christoff 符号, 则 $(p, v) \in TM^n$ 可写成 $v = \sum\limits_{i=1}^n v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 任何 $T_{(p,v)}$ (TM^n) 中的一元素 $w = \sum\limits_{i=1}^n \left(Y_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + V_i \dfrac{\partial}{\partial v_i}\right)$. 这里用简单的计算得出

$$w^{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i v_j Y_k\right) \frac{\partial}{\partial v_i} \right\}$$

和

$$w^v = w - w^{\mathcal{H}}.$$

5.1.2 余切丛上的辛结构

让 $\Lambda^1(M^n)$ 表示 M^n 上一次微分形式的集合, 通常 $\Lambda^1(M^n)$ 被称为余切丛. 令 $\hat{\pi}$: $\Lambda^1(M^n) \to M^n$ 为投影映射, 则投影映射所诱导的拉回映射可写为 $\hat{\pi}^*$. 其实如果 $\beta \in \Lambda^k(M^n)$ 和 $\xi_j \in T(\Lambda^1(M^n))$, 则

$$(\hat{\pi}^* \circ \beta)(\xi_1, \cdots, \xi_k) = \beta(\hat{\pi}_* \xi_1, \cdots, \hat{\pi}_* \xi_k).$$

定义 5.1 (1) 令 $\hat{\pi}$: $\Lambda^1(M^n) \to M^n$ 为如上的投影映射, 则"位置形式"

$$\begin{aligned} \eta_{\hat{\pi}}: \quad & \Lambda^1(M^n) \to \Lambda^1(\Lambda^1(M^n)), \\ & \alpha \to \hat{\pi}^* \circ \alpha \end{aligned}$$

称为余切丛 $\Lambda^1(M^n)$ 上的接触形式 (contact form).

(2) "位置形式" (或接触形式)$\eta_{\hat{\pi}}$ 的外微分为

$$\Omega = d\eta_{\hat{\pi}}.$$

我们称之为 $\Lambda^1(M^n)$ 上的经典辛结构. 显然 $\Omega \in \Lambda^2(\Lambda^1(M^n))$.

我们可以将 $\Omega = d\eta_{\hat{\pi}}$ 用局部坐标写出. 假设 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ 是光滑流形 M^n 在点 p 附近的局部坐标系. 则 $\Lambda^1(M^n)$ 中的任何一元素 α 在局部坐标系 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ 下写成

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_i.$$

所以 $\{(x_1, \cdots, x_n,\, y_1, \cdots, y_n)\}$ 构成一个 $\Lambda^1(M^n)$ 的一个局部坐标系, 余切丛 $\Lambda^1(M^n)$ 的典型辛结构 Ω 可以写成

$$\begin{aligned} \Omega = d\eta_{\hat{\pi}} &= d(y_1 dx_1 + \cdots + y_n dx_n) \\ &= dy_1 \wedge dx_1 + \cdots + dy_n \wedge dx_n. \end{aligned}$$

我们需要指出的是余切丛上的经典辛结构 Ω 仅仅与 M^n 的微分结构有关, 和 $\Lambda^1(M^n)$ 的任何度量无关.

5.1.3 切丛和余切丛的同构映射

不幸的是切丛 TM^n 没有一个和度量无关的经典辛结构. 所以我们考虑切丛 TM^n 和余切丛 $\Lambda^1(M^n)$ 之间的微分同构. 这样的同构可以由 M^n 上的 Riemann

度量 g 诱导产生：

$$\begin{aligned} F_g\text{：}\quad & TM^n \to \Lambda^1(M^n), \\ & (p,v) \to \langle v, \cdot \rangle_g \Big|_p, \end{aligned}$$

这里 $F_g(p,v)(X) = \langle v, X \rangle$ 对所有 $X \in T_p(M^n)$ 成立. 所以 F_g 是个微分同胚. 从而 $\Omega_g = F_g^* \circ \Omega$ 是 TM^n 上的一个辛结构, $\eta_g = F_g^* \circ \eta_{\hat{\pi}}$ 则称为 TM^n 上的接触形式 (或称为 TM^n 上的 Liouville 形式).

我们将证明 TM^n 的测地流将保持辛结构 Ω_g 和接触形式 η_g 不变, 从而测地流保持 TM^n 的体积元素不变.

5.1.4　测地流在 TM^n 中的导数向量场

因为 (M^n, g) 是一个 Riemann 流形, 所以切丛 TM^n 有一个被诱导的能量函数：

$$\begin{aligned} E_g\text{：}\quad & TM^n \to \mathbb{R}, \\ & (p,v) \to \frac{1}{2}\|v\|_g^2 \Big|_p. \end{aligned}$$

我们还观察到, Ω_g 是 TM^n 上非退化的二次闭形式, 从而 TM^n 存在一个唯一的向量场 Z_g 使得

$$\Omega_g(Z_g, \cdot) = -dE_g.$$

定理 5.2　假设 (M^n, g) 是个 Riemann 流形, 再假设测地流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和向量场 Z_g 如上所述. 则我们必有

$$\frac{d\phi_t}{dt} = Z_g. \tag{5.1}$$

证明　因为所期望的等式 (5.1) 的两端都不依赖于局部坐标系的选取, 所以我们只需证明 (5.1) 在某个局部坐标系下成立.

假设 $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ 是 M^n 的一个局部坐标系, 则双切丛 TM^n 上的任何一个向量场可写成

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} + V^j \frac{\partial}{\partial v_j} \right). \tag{5.2}$$

注意到

$$\frac{\partial^2 E_g}{\partial v_i \partial v_j} = g_{ij}, \quad \frac{\partial E_g}{\partial x_i}\bigg|_{(x,v)} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} v_j v_k$$

和

$$\frac{\partial^2 E_g}{\partial x_i \partial v_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} v_k, \text{ 这里 } E_g = \frac{1}{2}\sum_{k,j} g_{jk} v_j v_k.$$

回忆一下, 由定义

$$\Omega_g(Z_g, \cdot) = -dE_g \tag{5.3}$$

和

$$\Omega_g = F_g^*(dv_1 \wedge dx_1 + \cdots + dv_n \wedge dx_n), \tag{5.4}$$

我们得出

$$\begin{cases} \Omega_g\left(Z_g,\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\dfrac{\partial E_g}{\partial x_i}, \\ \Omega_g\left(Z_g,\ \dfrac{\partial}{\partial v_j}\right) = -\dfrac{\partial E_g}{\partial v_j}. \end{cases} \tag{5.5}$$

令 (g^{ij}) 为 (g_{ij}) 的逆矩阵. 方程组 (5.5) 和 (5.2) 给出

$$\begin{cases} Y^j(Z_g) = v_j, \\ V^k(Z_g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,i,l=1}^{n} g^{ki}\left(\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - 2\dfrac{g_{il}}{\partial x_j}\right) v_j v_l. \end{cases} \tag{5.6}$$

我们再回忆一下 Christoff 符号可写成

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right). \tag{5.7}$$

由 (5.6) 和 (5.7) 推出

$$\begin{cases} Y^j(Z_g) = v_j, \\ V^i(Z_g) = -\displaystyle\sum_{j,\ k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} v_j v_k. \end{cases}$$

最后我们得出

$$Z_g = \sum_{i=1}^{n}\left\{ v^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j,\ k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} v_j v_k \frac{\partial}{\partial v_i} \right\}, \tag{5.8}$$

从而 Z_g 在 TM^n 生成的流 $(p(t), v(t))$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{dv_i}{dt} = -\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} v_j v_k = -\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \dfrac{dx_i}{dt}\dfrac{dx_k}{dt}. \end{cases}$$

这恰恰是我们在第一章导出的测地线方程. 因此

$$\frac{d\phi_t}{dt} = Z_g.$$

证毕.

5.1.5 测地流的 Liouville 不变定理

我们在这一节要说明测地流 $\{\phi_t\}$ 会保持多个几何不变量.

定理 5.3 (辛结构不变定理) 令 $\{\phi_t\}, \Omega_g$ 和 η_g 为 Riemann 流形 (M^n, g) 诱导的在 TM^n 上的测地流、辛结构和接触形式. 则

$$\begin{cases} \phi_t^*\Omega_g = \Omega_g, \\ \phi_t^*\eta_g\Big|_{SM^n} = \eta_g\Big|_{SM^n} \end{cases} \tag{5.9}$$

对所有 t 成立.

证明 令 $\mathcal{L}_{Z_g}$ 为向量场 Z_g 方向的李导数. 我们只需证明

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{Z_g}\Omega = 0, \\ \mathcal{L}_{Z_g}\eta_g\Big|_{SM^n} = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

由李导数的定义, 我们可以算出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Z_g}\Omega_g &= d[\Omega_g(Z_g, \cdot)] + d\Omega_g(Z_g, \cdot, \cdot) \\ &= d[-dE_g] + 0 \\ &= -d^2E_g = 0. \end{aligned}$$

这里我们用到下列事实：

(1) 辛结构 $\Omega_g = F_g^*\Omega$ 是闭的 (恰当的), 即 $d\Omega_g = F_g^*(d\Omega) = F_g^*(dd\eta_{\hat{\pi}}) = d(dF_g^*\eta_{\hat{\pi}}) = 0$;

(2) $d^2 = 0$.

按照定义, 对所有 $X \in T_{(p,v)}(TM^n)$, 我们有

$$\eta_g(X)\Big|_{(p,v)} = \langle v, \pi_*(X)\rangle_g.$$

根据李导数的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Z_g}\eta_g\Big|_{SM^n} &= \{d \circ i_{Z_g} + i_{Z_g} \circ d\}\eta_g\Big|_{SM^n} \\ &= d\langle v, \pi_*(Z_g)\rangle\Big|_{SM^n} + \Omega_g(Z_g, \cdot)\Big|_{SM^n} \\ &= d\left(\|v\|^2\Big|_{SM^n}\right) + dE_g\Big|_{SM^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕.

引理 5.4 设 (M^n,g) 是一个完备的 Riemann 流形, Ω_g 为 TM^n 的辛结构, η_g 为 TM^n 上的接触形式. 假设 G 是 TM^n 上 g 诱导的度量. 则 (TM^n,G) 的体积元素为 $\Omega_g^n=\underbrace{a_n\Omega_g\wedge\cdots\wedge\Omega_g}_{n次}$. 同样地, (SM^n,G) 的体积元素为 $b_n\eta_g\wedge\Omega_g^{n-1}$, 这里 a_n 和 b_n 是只依赖于 n 的常数.

证明 我们要证明

$$d\mathrm{vol}_G=\Omega_g^n. \tag{5.11}$$

所期望的 (5.11) 的两端不依赖于局部坐标系的选取. 对任意一点 $p\in M^n$, 我们可以用指数映射

$$\mathrm{Exp}_p\colon \mathbb{R}^n\to M^n$$

诱导地测地坐标系 $\{(x_1,\cdots,x_n)\}$, 此时 Christoff 符号 $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ 有性质 $\Gamma_{ij}^k(O)=0$, 这里 $p=\mathrm{Exp}_p0$. 简单的计算表明

$$\Omega_g\Big|_{(p,v)}=dv_1\wedge dx_1+\cdots+dv_n\wedge dx_n$$

和

$$d\mathrm{vol}_G\Big|_{(p,v)}=dv_1\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dv_n\wedge dx_n,$$

从而

$$(n!)d\mathrm{vol}_G\Big|_{(p,v)}=\underbrace{\Omega_g\wedge\cdots\wedge\Omega_g}_{n次}.$$

关于 $d\mathrm{vol}_G\Big|_{SM^n}=b_n\eta_g\wedge\Omega_g^{n-1}$ 的证明类似, 故略去. 更进一步计算表明 $a_n=\dfrac{1}{n!}$ 和$b_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$. 证毕.

推论 5.5 (体积元不变定理) 设 (M^n,g) 是一个完备 Riemann 流形, $\{\phi_t\}$ 是 TM^n 中的测地流. 则测地流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 保持 (TM,G) 的体积元素不变, 而且保持 $(SM^n,G|_{SM^n})$ 的体积元素不变.

上述定理 5.3 和推论 5.5 通常被称为 Liouville 定理.

§5.2 闭 测 地 线

我们已经看到闭测地线的研究在大范围几何研究中起了重要作用. 例如对单一半径的估计以及著名的 Synge 定理的证明. 本节的一个主要目的是要导出下列结果.

定理 5.6 (Lusternik, 1951) 假设 (M^n, g) 是个紧 Riemann 流形, 则 (M^n, g) 必具有一条非平凡的闭测地线.

我们将由浅入深地导出定理 5.6. 首先考虑一个特殊情况.

引理 5.7 如果 (M^n, g) 为一个紧的 Riemann 流形而且 M^n 有非平凡的基本群 $\pi_1(M_n) \neq 0$, 则 (M^n, g) 有一条不可收缩的闭测地线.

证明 令 $l_o = \inf\{L(\sigma) | \sigma$ 不可收缩$\}$, 这里 $L(\sigma)$ 表示 σ 的长度. 我们选取一列光滑不可收缩的闭曲线 σ_i: $S^1 \to M^n$满足

(i) $L(\sigma_i) \leqslant l_0 + \dfrac{1}{i}$,

(ii) σ_i的参数和它的弧长参数成正比,

(iii) σ_i属于同一同伦类$[\varphi]$.

这样的序列是个等度连续的曲线族. 因为 M^n 是紧的, 由 Arzela-Ascoli 引理, $\{\sigma_i\}$ 有个子序列 $\{\sigma_{i_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ 收敛于一条闭曲线 σ: $S^1 \to M^n$. 这样的闭曲线满足 $L(\sigma) = l_0$.

根据第一变分公式, σ 必是一条闭测地线. 当然 σ 是不可收缩的闭曲线, 仍属于自由同伦类 $[\varphi]$. 证毕.

当 (M^n, g) 是紧单连通时, 我们将用 Min-Max 方法和 Birkhoff 曲线缩短程序来导出闭测地线的存在性. 为此我们引进 Birkhoff 程序.

在给出 Birkhoff 曲线缩短程序的精确定义之前, 首先简单说明一下该程序是怎样工作的. 假设 σ: $S^1 \to M^n$ 是一条分段光滑的连续闭曲线且它的长度为 $L(\sigma)$. 记 $\mathrm{Inj}(M^n, g)$ 为 (M^n, g) 的单一半径, 我们取一个充分大的正整数 N 使得 $L(\sigma)/N < \mathrm{Inj}(M^n, g)$, 将闭曲线 σ 分成 N 段且每一段的长度为 $\dfrac{L(\sigma)}{N}$. 设分割点为 $q_0, q_1, \cdots, q_N$ $(= q_0)$. 我们接着把连 q_i 到 q_{i+1} 的那一段用一段唯一的连 q_i 和 q_{i+1} 的最短测地线段 τ_i 代替. 最后再取测地线段 τ_i 的中点 p_i, 并且将 $p_0, p_1, \cdots, p_{N-1}$ 用分段测地线连接起来, 得到一个新的闭分段测地线 $\beta(\sigma)$, 见图 15 中的闭虚线. 显然 $\beta(\sigma)$ 的长度短于 σ 的长度, $L(\sigma) = L(\beta(\sigma))$ 当且仅当 σ 是一条闭测地线.

通常地, Birkhoff 程序和正整数 N 有关. 如上所述 $L(\sigma)/N < \mathrm{Inj}(M^n, g)$, 这里 σ: $[0,1] \to M^n$ 是一条分段光滑的闭曲线, $S^1 = [0,1]/\{0,1\}$. 下面我们定义 $\beta(\sigma)$ 和相关的同伦映射使得 $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_1 = \beta(\sigma)$. 这样的同伦 $\{\sigma_s\}_{0 \leqslant s \leqslant 1}$ 还会满足当 $s_1 \leqslant s_2$ 时 $L(\sigma_{s_1}) \geqslant L(\sigma_{s_2})$.

我们首先假设 σ: $[0,1] \to M^n$ 的参数和 σ 的弧长参数成正比. 如果不是, 第一部分的同伦就取为重新参数化. 我们定义 $\sigma_{\frac{1}{2}}$ 为唯一分段测地闭曲线使得 $\sigma_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{i}{N}\right)$ $= \sigma\left(\dfrac{i}{N}\right)$, 这里 $i = 1, 2, \cdots, N$. 当 $s \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, σ_s 由下列分式给定:

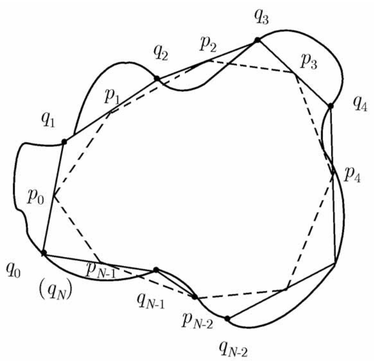


图 15

$$\sigma_s\left(\frac{i}{N}+t\right)=\begin{cases}\tau_i^s(t), & \text{如 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{2s}{N},\\ \sigma\left(\dfrac{i}{N}+t\right), & \text{如 } \dfrac{2s}{N}\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{N},\end{cases}$$

这里 τ_i^s 是连 $\sigma\left(\frac{i}{N}\right)$ 到 $\sigma\left(\frac{i}{N}+\frac{2s}{N}\right)$ 的最短测地线段, 并且 τ_i^s 的参数定义为 $t\in\left[0,\frac{2s}{N}\right]$ 和弧长参数成正比. 最后, 我们令 σ_1 为唯一的分段闭测地线连接 $\sigma_1\left(\frac{i}{N}+\frac{1}{2N}\right)=\sigma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{N}+\frac{1}{2N}\right)$; 我们并且要求 σ_1 在每一个小区间 $\left[\frac{i}{N}+\frac{1}{2N},\frac{i+1}{N}+\frac{1}{2N}\right]$ 的参数和弧长参数成正比. 类似地, 我们像上面一样构造一个从 $\sigma_{\frac{1}{2}}$ 到 σ_1 的同伦.

我们要用下列闭曲线空间的子集

$$\Lambda_g^c(M^n)=\{\sigma\colon S^1\to M^n|L_g(\sigma)\leqslant c\},$$

上述讨论可以总结如下:

引理 5.8 (Birkhoff 收缩曲线过程) 假设正整数 N 满足 $\frac{c}{N}<\operatorname{Inj}(M^n,g)$, $\beta\colon\Lambda_g^c(M^n)\to\Lambda_g^c(M^n)$ 为如上所述的 Birkhoff 曲线收缩过程. 则

(i) $\beta\colon\Lambda_g^c(M^n),\to\Lambda_g^c(M^n)$ 是一个连续算子而且 $L(\beta(\sigma))$ 关于 σ 连续;

(ii) β 和恒等映射 id: $\Lambda_g^c(M^n)\to\Lambda_g^c(M^n)$ 同伦等价. 特别地, σ 和 $\beta(\sigma)$ 自由同伦;

(iii) 如果 $\sigma\in\Lambda_g^c(M^n)$, 则 $L(\beta(\sigma))\leqslant L(\sigma)$, 等式成立当且仅当 σ 是一条闭测地线.

下面我们用引理 5.8 和 Birkhoff 的 Min-Max 方法导出定理 5.6 的特殊形式.

命题 5.9 假设 g 是球面 S^2 上的光滑 Riemann 度量, 则 (S^2,g) 有一条非平凡的测地线.

证明 令 $\delta_0 = \min\left\{\dfrac{\mathrm{Inj}(M^n)}{2}, \dfrac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right\}$, 这里 $K_0 = \max\limits_{p\in S^2}\{K_g(p)\}$. 则 δ_0 小于 (S^2, g) 凸半径, 即任何度量圆盘 $B_{\delta_0}(p)$ 是个凸集. 特别地, 如果 $\sigma\colon S^1 \to S^2$ 是条闭曲线且 σ 有长度 $L(\sigma) < \delta_0$, 则序列 $\beta(\sigma), \beta^2(\sigma), \cdots, \beta^k(\sigma), \cdots$ 必然收敛到一条平凡闭曲线, 即点曲线.

现在我们取一个从单位球面 $S^2(1)$ 到 S^2 的微分同胚 $F\colon S^2(1) \to S^2$(图 16). 记 $S^2(1) = \{(x,y,z)\big| x^2+y^2+z^2=1\}$. 我们视 $[-1,1]$ 和前半水平圆周 $\{(x,y,z)\in S^2(1)\big| z=0, x\geqslant 0\}$ 等价, 则 F 诱导了一个映射

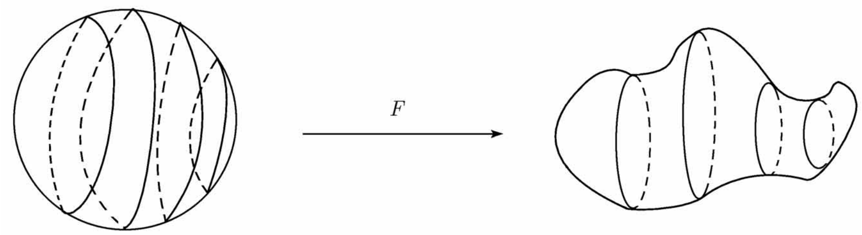


图 16

$$F\colon ([-1,1]/\{1,-1\}) \to (\Lambda_g(S^2), \Lambda_g^0(S^2))$$
$$y \to F(\cdot, y, \cdot).$$

记

$$c = \max_{-1\leqslant y\leqslant 1}\{L(F(\cdot,y,\cdot))\}.$$

取 N 充分大, 使得 $\dfrac{c}{N} < \mathrm{lnj}(S^2, g)$. 记

$$l_k = \max_{-1\leqslant y\leqslant 1} L(\beta^k \circ F(\cdot,y,\cdot)).$$

很显然, 对所有 k, $l_k \geqslant \delta_0$. 否则的话, $\beta^k\circ F$ 会收缩一族点映射. 从而 $\deg(\beta^k\circ F)=0$. 由引理 5.8 得知, $\beta^k\circ F$ 同伦于 F, $\deg(F) = \deg(\beta^k\circ F) = 0$, 矛盾于 F 是微分同胚的假设, 因此我们必有

$$l_k \geqslant \delta_0 > 0 \tag{5.12}$$

对所有 k 成立. 显然 $\{l_k\}_{k\geqslant 1}$ 是个递减序列, 从而, $\lim\limits_{k\to+\infty} l_k = \hat{e} \geqslant \delta_0 > 0$.

对每个 k, 选取 $y_k \in [-1,1]$ 使得

$$L(\beta^{k+1}\circ F(\cdot, y_{k+1}, \cdot)) = l_{k+1}.$$

令 $\sigma_k=\beta^k F(\cdot,y_{k+1},\cdot)$. 因为 $\{\sigma_k\}$ 等度连续, $\{\sigma_k\}$ 有个子序列 $\{\sigma_{k_j}\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\sigma_{k_j}=\hat\sigma$. 注意到

$$\begin{aligned}L(\beta(\hat\sigma))&=L(\beta(\lim_{j\to\infty}\sigma_{k_j}))=L(\lim_{j\to\infty}\beta(\sigma_{k_j}))\\&=\lim_{j\to\infty}l_{k_j+1}=\hat l=L(\hat\sigma).\end{aligned}$$

根据引理 5.8, $\hat\sigma$ 必是一条测地线. 证毕.

受到命题 5.9 的启发, 我们现在可以完成定理 5.6 的证明.

定理 5.6 的证明 由引理 5.7, 我们可以假设 M^n 是紧单连通的光滑流形. 令 $\pi_k(M^n)$ 为流形 M^n 的 k 阶同伦群, $H_k(M^n,\mathbb{Z})$ 为 M^n 的 k 阶下同调群. 代数拓扑中有个著名的 Hurewicz 定理:"如果 $\pi_i(M^n)=0$ 对 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 成立, 则必有 $H_i(M^n)\cong\pi_i(M^n)=0$ 对 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 成立, 并且当 $i=k$ 时 $\pi_k(M^n)=H_k(M^n)$". 因为 M^n 是紧单连通流形, 我们更观察到 $H_n(M^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\neq 0$. 所以

$$k_0=\inf\{k\geqslant 2|H_k(M^n,\mathbb{Z})\neq 0\}\geqslant 2.$$

由 Hurewicz 定理得出

$$\hat k_0=\inf\{k\geqslant 2|\pi_k(M^n,\mathbb{Z})\neq 0\}\geqslant 2.$$

取一个光滑映射 $F\colon S^{\hat k_0}(1)\to M^n$ 使得 F 代表 $\pi_{\hat k_0}(M^n)$ 中的一个非平凡元素. 令 $B^{\hat k-1}$ 为 $\mathbb{R}^{\hat k-1}$ 中的实心单位球 $B^{\hat k-1}=\{p\in\mathbb{R}^{\hat k-1}|\|p\|\leqslant 1\}$. 再令 $\Sigma^{\hat k-1}=\{x=(x_0,\cdots,x_{\hat k})\in\mathbb{R}^{\hat k+1}|\|x\|=1,x_0\geqslant 0,x_1=0\}$. 则 $\Sigma^{\hat k-1}$ 同胚等价于 $B^{\hat k-1}$. 从而光滑映射 F 诱导一个映射

$$F\colon(\beta^{\hat k-1},\partial B^{\hat k-1})\to(\Lambda_g(M^n),\Lambda_g^0(M^n)).$$

其实对每个 $p\in B^{\hat k-1}\cong\Sigma^{\hat k-1}\subset S^{\hat k}(1)\subset\mathbb{R}^{\hat k+1}$,都存在唯一的圆圈垂直于超平面 $\{x_1=0\}$ 并以 p 为起始点. 取 N 充分大, 使

$$\frac{\max\limits_p\{L(F(p,\cdot))\}}{N}<\mathrm{Inj}(M^n,g).$$

我们已经指出 (M^n,g) 的凸半径 $\delta_0>0$. 对每个 $p\in\Sigma^{\hat k-1}$, 我们令 $F_j(p,\cdot)=\beta^j\circ F(p,\cdot)$ 和

$$l_j=\max_{p\in\Sigma^{\hat k-1}}L(F_j(p,\cdot)).$$

因为 F 是代表 $\pi_{\hat k}(M^n)$ 中的非零元素, 所以可以证明

$$l_j\geqslant\delta_0$$

对所有 j 成立. 否则 $B^j \circ F$: $(B^{\hat{k}-1}, \partial B^{\hat{k}-1}) \to (\Lambda_g(M^n), M^n)$ 是平凡元素, 由引理 5.8 得出 F 是平凡元素, 矛盾.

类似于命题 5.9 的证明. 我们取 $\sigma_k \in \mathrm{Image}(\beta^k \circ F)$ 使得

$$L(\beta \circ \sigma_j) = \max_{p \in \Sigma^{\hat{k}-1}} \{L(\beta^{j+1} \circ F(p))\},$$

从而 $\{\sigma_j\}$ 等度连续, 由 Ascoli 引理, 存在一个收敛子序列 $\sigma_{j_i} \to \hat{\sigma}$. 由引理 5.8 得出 $L(\hat{\sigma}) = L\left(\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_{j_i}\right) = \lim\limits_{i\to\infty} L(\sigma_{j_i}) \leqslant \lim\limits_{i\to+\infty} l_{j_i} = \hat{l}$, 这里我们用到了 "$\{l_j\}$ 是递减序列" 的事实. 另一方面, 我们也有

$$L(\sigma_{j_i}) \geqslant L(\sigma_{j_i+1}) = L(\beta \circ \sigma_{j_i}),$$

故

$$\lim_{i\to+\infty} L(\sigma_{j_i}) \geqslant \lim_{i\to+\infty} l_{j_i} = \hat{l}.$$

综合上述不等式, 我们得出

$$L(\hat{\sigma}) = \lim_{i\to+\infty} L(\sigma_{j_i}) = \hat{l}.$$

最后, 我们观察到

$$L(\beta \circ \hat{\sigma}) = \lim_{i\to\infty} L(\beta \circ \sigma_{j_i+1}) = \lim_{i\to\infty} l_{j_i} = \hat{l} = L(\hat{\sigma}).$$

根据引理 5.8(iii), 我们断言 $\hat{\sigma}$ 必是一条闭测地线并且具有长度 $L(\hat{\sigma}) = \hat{l} \geqslant \delta_0 > 0$. 证毕.

§5.3 无共轭点的流形和 Hopf 猜测

在本节中, 我们讨论一种无共轭点的流形以及有关的 Hopf 猜想.

根据命题 3.3, 我们可以给出无共轭点流形的一个等价定义.

定义 5.10 假设 (M^n, g) 是个完备的 Riemann 流形. 如果指数映射

$$\begin{aligned} F = \mathrm{Exp}\colon\quad & TM^n \to M^n \times M^n, \\ & (p, v) \to (p, \mathrm{Exp}_p v) \end{aligned}$$

具有非退化 (或满秩) 的导数 (即 $\det F_*|_{(p,v)} \neq 0$ 对所有 $(p, v) \in TM^n$ 成立), 则称 (M^n, g) 是无共轭点的流形.

我们首先举一些无共轭点流形的例子. 假设 (M^n, g) 是完备的 Riemann 流形且 (M^n, g) 具有非正曲率. 如果 $\{J(t)\}$ 是在一条具有单位速度测地线 σ 上的一个 Jacobi

场, 并且设 $J(0)=0$ 和 $\|J'(0)\|=1$, 则由 Rauch 比较定理, $\|J(t)\|\geqslant t$. 所以测地线 σ 上无任何 $\sigma(0)$ 的共轭点. 我们立即得到下列结果.

引理 5.11 如果 (M^n,g) 是个完备的 Riemann 流形且具有非正曲率, 则 (M^n,g) 必无共轭点.

在 1948 年, E. Hopf 提出了下列猜测：

猜测 5.12 如果 g 是在 n 维环面 T^n 上的光滑度量并且 (T^n,g) 无共轭点, 则 (T^n,g) 必为一个平坦流形.

需要指出的是 R. Gulliver 在 1975 年在高亏格的紧曲面 M^2 上构造一族 Riemann 度量 g 使得 (M^2,g) 无共轭点, 但度量 g 的曲率的符号有正也有负, 即存在两点 $p_1,p_2\in M^2$ 使得 $K_g(p_1)K_g(p_2)<0$. 当然 Gulliver 的例子 M^2 不同胚于二维环面.

当 $n=2$ 时, Hopf 猜测 5.12 是下列定理的推论.

定理 5.13 (E.Hopf, 1949, $n=2$, L.Green, 1958) 假设 (M^n,g) 是一个紧流形且无共轭点. 则 (M^n,g) 的总纯量曲率为非正, 即

$$\int_{M^n}\mathrm{Scal}_g(p)d\mathrm{vol}\leqslant 0$$

等式成立当且仅当 (M^n,g) 是平坦流形.

证明 我们首先在单位切丛 SM^n 上定义一个对称二次形式值的函数

$$\begin{aligned}\mathrm{II}:\quad & SM^n\to\otimes^2(M^n),\\ & (p,v)\to\mathrm{II}_{(p,v)}.\end{aligned}$$

对任何给定的 $\xi=(p,v)\in S\tilde{M}^n$, 我们考虑测地线 $\sigma(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)$ 并且考虑相应的“半空间”：

$$\mathcal{B}_\xi=\bigcup_{t\geqslant 0}^{+\infty}\mathcal{B}_t(\sigma(t)),$$

这里 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 是 M^n 的万有覆盖空间并且具有 g 的提升度量 $\tilde{g}$.

由距离函数三角不等式, 可以证明当 $t_1<t_2$ 时有

$$\mathcal{B}_{t_1}(\sigma(t_1))\subset\mathcal{B}_{t_2}(\sigma(t_2)).\tag{5.13}$$

任取一个单位向量 $w\in T_pM^n, w\perp v$, 由包含关系 (5.13) 得出 $h_t(w)=\mathrm{II}_{\partial B_t(\sigma(t))}(w,w)$ 是个单调递增函数, 这里 $h_t(w)=-\langle\nabla_w w,\sigma'(0)\rangle,\ t>0$. 若令

$$\eta_{-\varepsilon}(w)=\mathrm{II}_{\partial B_\varepsilon(\sigma(-\varepsilon))}(w,w)=-\langle\nabla_w w,\sigma'(0)\rangle,$$

类似地可以证明, $h_t(w) < \eta_{-\varepsilon}(w)$. 因此 $h_t(w)$ 单调递增上有界. 所以我们定义 $\partial\mathcal{B}_\xi = \mathcal{H}_\xi$ 的二次形式为

$$\mathrm{II}_\xi(w,w) = \mathrm{II}_{\partial\mathcal{B}_\xi}(w,w) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{II}_{\partial\mathcal{B}_t(\sigma(t))}(w,w).$$

假设 $\{\phi_t\}$ 是 SM^n 的测地流, 由 Gromov-Bishop 定理的证明, 我们知道 $\mathrm{II}_{\phi_t(\xi)}$ 满足所谓的 Riccati 方程, 即

$$\mathrm{II}'_{\phi_t(\xi)} + \mathrm{II}^2_{\phi_t(\xi)} + R(t) = 0, \tag{5.14}$$

这里我们把 $\mathrm{II}_{\phi_t(\xi)}(\cdot,\cdot)$ 看成 $(n-1)\times(n-1)$ 的对称矩阵.

如果 $\{E_i(t)\}$ 是 $\sigma(t) = \phi_t(\xi) = \mathrm{Exp}_p(tv)$ 上的正交平行量场且 $E_n(t) = \sigma'(t)$, 则我们有

$$R_{ij}(t) = \langle R(E_i,\ \sigma')E_j, \sigma'\rangle = \langle R(\sigma', E_i)\sigma', E_j\rangle$$

和

$$R(t) = (R_{ij}(t)).$$

矩阵 $R(t)$ 的迹为 Ricci 曲率 $\mathrm{tr}(R(t)) = \mathrm{Ric}(\sigma'(t),\ \sigma'(t))$. 类似地, 极限球面 (Horosphere)$\partial\mathcal{B}_\xi$ 的第二基本形式 II_ξ 的迹为 $\partial\mathcal{B}_\xi$ 的平均曲率. 用几何不等式

$$(n-1)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2) \geqslant (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})^2,$$

我们得到

$$(\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)})' + \frac{1}{n-1}(\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)})^2 + \mathrm{Ric}(\sigma'(t), \sigma'(t)) \leqslant 0. \tag{5.15}$$

回忆一下 §5.1 中的 Liouville 不变理论, 我们得出

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{SM^n} (\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)})' d\mathrm{vol}_{SM^n} dt &= \int_{SM^n} \{\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)} - \mathrm{trII}_\xi\} d\mathrm{vol}_{SM^n} \\ &= \int_{SM^n} (\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)}) d\mathrm{vol}_{SM^n} - \int_{SM^n} (\mathrm{trII}_\xi) d\mathrm{vol}_{S_{M^n}} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.16}$$

最后我们得出

$$\begin{aligned}\int_{M^n} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_{M^n} &= a_n \int_{SM^n} \mathrm{Ric}(\xi,\xi) d\mathrm{vol}_{SM^n} \\ &= a_n \int_0^1 \int_{SM^n} \mathrm{Ric}(\phi_t(\xi), \phi_t(\xi)) d\mathrm{vol}_{SM^n} \\ &\leqslant -\frac{1}{n-1}\int_0^1 \int_{SM^n} (\mathrm{trII}_{\phi_t(\xi)})^2 d\mathrm{vol}_{SM^n} dt \leqslant 0,\end{aligned} \tag{5.17}$$

这里 a_n 是个只和维数相关的常数.

等式 (5.17) 和 (5.15) 同时成立当且仅当

$$\begin{cases} (\mathrm{tr II}_{\phi_t(\xi)})^2 \equiv 0, & \text{a.e.,} \\ \mathrm{II}_{\phi_t(\xi)} = \lambda(t) I, & \text{a.e.,} \end{cases} \tag{5.18}$$

即 $\mathrm{II}_{\phi_t}(\xi) \equiv 0$, 从而根据 Riccati 方程有曲率算子 $R_{\phi_t(\xi)} = (R_{ij}(t)) = 0$ 几乎处处成立.

由 (M^n, g) 光滑, 曲率算子 $R_{\phi_t(\xi)}(\cdot,\cdot)$ 关于 ξ 连续, 从而曲率算子 $R_{\phi t(\xi)}(\cdot,\cdot)$ 恒为零. 证毕.

顺便提一下, E. Hopf 在 1948 年犯了一个错误, 声称上述证明中的函数 $\mathrm{II}_\xi\ (\cdot,\cdot)$ 是关于 ξ 连续的. 其实, 将近 40 年以后, 在 Ballmann, Brin 和 Burns 在 Gulliver 工作的基础上构造了一个反例, 即对有些无共轭点的紧曲面, II_ξ 不连续, 仅仅是可积.

在 1994 年, Hopf 猜测 5.12 最终由 Burago 和 Ivanov. 解决, 参见文献 [BI].

习 题 五

(含未解决的问题)

1. (i) 假设 $F\colon \mathbb{R}^n \to \tilde{M}^n$ 是一个局部微分同胚 (即 $\det\,[F_*(x)] \neq 0$ 对所有 x 成立), 再假设 $\tilde{M}^n$ 是单连通的. 问 $F\colon \mathbb{R}^n \to \tilde{M}^n$ 是否是一个整体微分同胚?

(ii) 假设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是一个单连通的完备 Riemann 流形和假设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 无共轭点, 问指数映射 $\mathrm{Exp}_p\colon T_p\tilde{M}^n \to \tilde{M}^n$ 是否是整体微分同胚?

(iii) 令 S^n 为 n 维单位球面 $(n \geqslant 2)$. 问 S^n 上是否容许一个无共轭点的度量?

2. (i) 假设 $(\bar{M}^n, \hat{g})$ 是一个完备的单连通的无共轭点的流形. 任取 $\tilde{M}^n$ 中的两点 p 和 q, 问 $(\tilde{M}^n, g)$ 中有几条从 p 到 q 的测地线?

(ii) 令 (M^n, g) 是一个完备的 Riemann 流形, 假设对 M^n 中的任何两点 $\{p, q\} \in M$, 都存在唯一的测地线相连. 问 M^n 是否单连通? 再用定理 3.1(见 §3.1) 证明 (M^n, g) 无共轭点.

3. (i) 假设 h 和 $\tilde{h}$ 为两个光滑函数满足 $h(0) = \tilde{R}(0)$, $h'(0) = \tilde{h}'(0) = 0$, 再假设 $h(x) \geqslant \tilde{h}(x)$. 问 $h''(0) \geqslant \tilde{h}''(0)$ 是否成立?(提示：用 Taylor 展式.)

(ii) 如 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个有光滑边界的子集且 $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. 再假设 $\partial\Omega$ 和 $\partial\tilde{\Omega}$ 相交 (当然相切) 于 p_0 点. 证明

$$k_{\partial\Omega}(p_0) \leqslant k_{\partial\tilde{\Omega}}(p_0),$$

这里 $k_{\partial\Omega}(p_0) = \langle \psi''|_{p_0} \vec{N}_{p_0} \rangle, \psi\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \partial\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 的弧长参数表示满足 $\psi(0) = p_0$, $\vec{N}_{p_0}$ 为外法单位向量 (在图中, $\vec{N}_{p_0} = (0, -1)$).

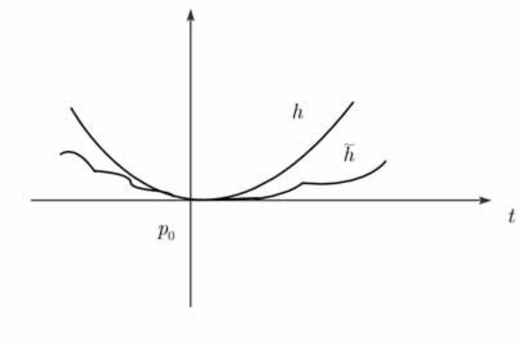


图 17

4 (用一个 Jacobi 张量找出另外一个 Jacobi 张量). (i) 假设 $y_1(t)$ 是二阶齐性方程 $y''+ky=0$ 的一个解, 用变参数方法 $y_2(t)=c(t)y_1(t)$ 导出另外一个解

$$y_2(t)=y_1(t)\int_a^t\frac{1}{y_1^2(s)}ds.$$

(ii) 假设 σ: $\mathbb{R}\to M^n$ 是一条测地线, $\{E_i(t)\}$ 是沿 σ 上的一组正交平行向量场 (即 $\nabla_{\sigma'}E_i=0$). 令 $R_{ij}(t)=\langle R(\sigma',E_i)\sigma',E_j\rangle$, $A(t)=(a_{ij}(t))$ 为 Jacobi 方程

$$A''(t)+R(t)A(t)=0 \tag{5.19}$$

的一个解. 当 $\det A(t)\neq 0$ 时, 证明

$$B_c(t)=A(t)\int_t^c A^{-1}(s)[A^{-1}(s)]^*ds$$

是 Jacobi 方程 (5.19) 的另一解且满足 $B_c(c)=0$. 从而 Jacobi 方程 (5.19) 的通解为

$$\tilde{A}(t)=A(t)\left[\int_0^t A^{-1}(s)(A^{-1}(s))^*dsC_1+C_2\right], \tag{5.20}$$

这里 A^* 为 A 的旋转阵, 即 $a_{ij}^*=a_{ji}$, C_1 和 C_2 为常数矩阵.(公式 (5.20) 在几何中, 尤其对测地流的研究有着极为重要的作用.)

5 (闭测地线和等距变换的轴). 假设 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 为一个完备的 Riemann 流形和假设 φ: $\tilde{M}^n\to\tilde{M}^n$ 是一个等距变换.

(i) 当 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 单连通且无共轭时, 令 $\sigma_{p,q}$: $[0,d(p,q)]\to\tilde{M}^n$ 为唯一的从 p 到 q 的测地线段, 并令

$$h_\varphi(p)=d(p,\varphi(p)).$$

用第一变分公式找出 ∇h_φ.

(ii) 证明点 p 是 h_φ 的一个临界点当且仅当 $\{\varphi^{-1}(p),p,\varphi(p)\}$ 落在同一测地线 σ 上.

(iii) 如果 $(\varphi\circ\sigma)(t)=\sigma(t+c)$ 对所有 t 成立, 则称 σ 是等距变换 φ 的一个轴, 设 (M^n,g) 为紧 Riemann 流形, π: $\tilde{M}^n\to M^n$ 是万有覆盖映射, $\varphi\in\pi_1(M^n)$. 如果 σ: $\mathbb{R}\to\tilde{M}^n$ 是 φ 的一个轴, 证明 $\pi\circ\sigma$ 为代表 $[\varphi]$ 的自由同伦类的闭测地线.

(iv) 用引理 5.7 证明, 如 $\varphi \in \pi_1(M^n)$, 则必存在一条 φ 的轴 σ: $\mathbb{R} \to \tilde{M}^n$.

6 (O′Sullivan 定理). 令 $(M^n, g), (\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 和 φ 如上.

(i) 假设 $\varphi \in \pi_1(M^n)$ 是基本群 $\pi_1(M^n)$ 的一个中心元 (即 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 对所有 $\psi^{e\pi_1(M^n)}$ 成立). 令 $h_\varphi(x) = d(x, \varphi(x))$. 证明

$$h_\varphi(\psi(x)) = h_{\psi^{-1}\varphi\psi}(x).$$

问当 $\varphi \in \pi_1(M^n)$ 为中心元时, h_φ: $\tilde{M}^n \to \mathbb{R}$ 有上界吗?

(ii) 假设 σ 是 φ 的一轴, $x_0 \in \sigma$ 是 h_φ 的一个临界点, $x_0 = \sigma(t_0)$. 当 $(\tilde{M}^n,\ \tilde{g})$ 无共轭点时, 证明对所有 $y \in \tilde{M}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ 正整数, 都有下列不等式

$$\begin{aligned} kd(x_0, \varphi(x_0)) &= d(\sigma(t_0), \sigma(kc + t_0)) \\ &\leqslant d(x_0, y) + \sum_{j=0}^{k-1} d(\varphi^j y, \varphi^{j+1} y) + d(\sigma^k x, \sigma^k y) \\ &\leqslant 2d(x_0, y) + kd(y, \varphi(y)). \end{aligned}$$

(iii) 问当 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 无共轭点时, 任何 h_φ 的临界点 x_0 是 h_φ 的全局 (绝对) 最小临界点吗?

(iv) 设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 无共轭点和假设 $\varphi \in \pi_1(M^n)$ 是个中心元. 用 (i)∼(iii) 的结果说明 $h_\varphi(x) \equiv C$ 是常数. 再说明 (M^n, g) 中的每一个点都有一条闭测地线通过. 从而有纤维丛

$$S^1 \to M^n \to M^n/S^1.$$

(v) (Hopf 弱定理). 假设 $(M^n,\ g)$ 紧且无共轭点, $\pi_1(M^n) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n\text{次}} = \mathbb{Z}^n$. 证明 M^n 和环面同胚. (即证明 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的每一点 p 都有 n 个不同方向 (线性独立) 的轴通过.)

注　上述结果 (v) 在 Hopf 猜想的证明中起了很重要的作用.

7 (未解决的问题). 令 S^3 为 3 维球面, g 是 S^3 上的一个光滑度量. 试问 (S^3, g) 上是否有无穷多条不同像集的闭测地线? 如果 (M^n, g) 为一个紧光滑 Riemann 流形, 问 (M^n, g) 是否具有无穷条不同像集的闭测地线?

8 (未解决的问题). 令 Σ^2 是一个亏格 $\geqslant 2$ 的闭曲面, (Σ^2, g) 具有非正曲率. 问 $S\Sigma^2$ 的测地线流 $\{\phi_t\}$ 是否是遍历 (ergodic)? (即任何一个 $S\Sigma^2$ 中的 $\{\phi_t\}$ 不变的可测集 Ω(即 $\phi_t\Omega \subset \Omega$) 是否必具有零测度或全测度? 即是否有 vol $(\Omega)[\text{vol}(S\Sigma^2 - \Omega)] = 0$?)

第六章　具有非正曲率的流形

关于非正曲率的研究在过去的 30 年已经取得了很多成果. 本章选了几个课题作些简介.

§6.1　测地线、非正曲率和负曲率

在本节中, 我们要导出几个在本章中经常用到的工具. 它们分别是三角比较定理、凸函数定理和由凸性引出各式各样的推论.

6.1.1　三角比较定理

首先我们要把第二章中的 Rauch 比较定理应用到单连通非正曲率流形上去.

定理 6.1 (Cartan-Hadamard)　设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是个完备的、单连通的 Riemann 流形且具有非正曲率, 则指数映射

$$\mathrm{Exp}_p\colon T_p\tilde{M}^n \to \tilde{M}^n$$

是个距离增加映射, 特别地, $\tilde{M}^n$ 是全局同胚于 $\mathbb{R}^n = T_p\tilde{M}^n$, Exp_p 是个全局微分同胚.

证明　令 $\{(t,\Theta)\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的极坐标系, 这里 $\Theta \in S^{n-1}(1)$. 则我们只需证明

$$\begin{aligned} F = \mathrm{Exp}_p\colon \mathbb{R}^n &\to \tilde{M}^n, \\ (t,\Theta) &\to \mathrm{Exp}_p(t\Theta) \end{aligned}$$

是距离增长映射.

设 $\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}$ 是 $S^{n-1}(1)$ 的单位切向量. 由 Gauss 引理

$$\left\langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)\right\rangle \equiv 0$$

和

$$\left\|F_*\frac{\partial}{\partial t}\right\| = \left\|\frac{\partial}{\partial t}\right\| = 1,$$

我们只需证明

$$\left\|F_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)\right\| \geqslant \left\|\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right\| = 1. \tag{6.1}$$

任取一条从 p 出发的测地线 $\sigma_\Theta(t)=\mathrm{Exp}_p(t\Theta)$. 则 $J(t)=F_*|_{(t,\theta)}\left(t\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}\right)$ 是沿 σ 上的一个 Jacobi 场. 它满足 $J(0)=0, J'(0)=\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}\perp\sigma'(0)$ 和 $\|J'(0)\|=\left\|\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}\right\|\equiv 1$. 因为 $K\leqslant 0$, 根据 Rauch 比较定理, 我们有

$$t\left\|F_*\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right\|=\|J(t)\|\geqslant t,$$

故得出 (6.1) 成立. 因此 $\|F_*|_{(t,\theta)}v\|\geqslant\|v\|$ 对所有 $v(t,\theta)\in\mathbb{R}^n$ 成立. 因为 $\mathbb{R}^n$ 和 $\tilde{M}^n$ 都单连通, 故 F 必是一个距离增加的全局微分同胚. 证毕.

因为定理 6.1, 所以单连通的非正曲率流形 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 通常称为 Cartan-Hadamard 流形. 根据定理 6.1, 我们可以导出关于 Cartan-Hadamard 流形的 Cosine 规则.

推论 6.2 (非正曲率的 Cosine 定律) 假设 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 是个 Cartan-Hadamard 流形, $\triangle_{abc}$ 是 $\tilde{M}^n$ 的一个测地三角形. 如果 $\triangle_{abc}$ 相邻两边长度为 a 和 b, 且如果夹角为 θ, 则他们对边的长度 c 满足

$$c^2\geqslant a^2+b^2-2ab\cos\theta. \tag{6.2}$$

证明 假设 $\triangle_{abc}$ 的相邻两边相交于顶点 p 处, 和假设 $\triangle_{abc}$ 的另外两个顶点为 x 和 y. 由定理 6.1 得出

$$\begin{aligned} F:\quad & \mathbb{R}^n\to\tilde{M}^n,\\ & v\to\mathrm{Exp}_p v \end{aligned}$$

是个距离增长映射. 设 $x^*=F^{-1}(x)$ 和 $y^*=F^{-1}(y)$.

考虑在 $\mathbb{R}^2$ 中的以 $\{O,x^*,y^*\}$ 为顶点的三角形简单计算表明 $\bar{c}=d(x^*,y^*)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$. 最后我们推出

$$c=d(F(x^*),F(y^*))\geqslant\bar{c}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}.$$

证毕.

我们要指出的是：不难证明 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 成立时, 测地三角形 $\triangle_{abc}$ 必张成 $\tilde{M}^n$ 中的一个全测地的平坦 2 维实心三角形.

下面我们讨论 Cartan-Hadamard 流形的测地三角形的内角和.

推论 6.3 (内角和定理) 假设 $\triangle_{abc}$ 是 Cartan-Hadamard 流行中的一个测地三角形, 则 $\triangle_{abc}$ 的内角和必小于或等于 π . 当内角和为 π 时, $\triangle_{abc}$ 必张成一个全测地的平坦 2 维三角形.

证明　假设 $\triangle_{abc}$ 三边的长度分别为 $\{a,b,c\}$, 它的三个内角为 $\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$. 取 $\mathbb{R}^2$ 中相应的三角形, 其边长也是 $\{a,b,c\}$, 但相应的内角为 $\{\theta_1^*,\theta_2^*,\theta_3^*\}$. (图 18 所示) 显然在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中 $\theta_1^*+\theta_2^*+\theta_3^*=\pi$. 因此我们只需证明

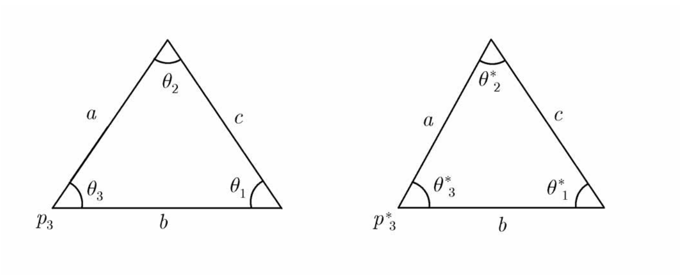


图 18

$$\theta_i \leqslant \theta_i^*. \tag{6.3}$$

假设长度为 c 的边是内角 θ_3 的对边. 由 Cosine 定律得出

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta_3 \leqslant c = a^2+b^2-2ab\cos\theta_3^*,$$

从而得出 $-\cos\theta_3 \leqslant -\cos\theta_3^*$. 也就是说, $\theta_3 \leqslant \theta_3^*$ 成立. 类似地我们也可以证明 $\theta_1 \leqslant \theta_2^*$ 和 $\theta_2 \leqslant \theta_3^*$, 因此不等式 (6.3) 对 $i=1,2,3$ 成立.

等式成立时的情形, 留作习题.　证毕.

6.1.2　距离函数的凸性与非正曲率

我们在本段中对非正曲率和距离函数以及凸性之间的关系将作个深入的讨论.

定理 6.4　(i) 假设 (M^n,g) 是个完备的 Riemann 流形且具有非正曲率, $\{J(t)\}$ 是沿着测地线 σ 上的 Jacobi 场, 则

$$\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| \geqslant 0. \tag{6.4}$$

(ii) 反之, 如果 (M^n,g) 是个完备流形且对任何测地线 σ 和 σ 上的任何 Jacobi 场都有 $\dfrac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| \geqslant 0$, 则 (M^n,g) 必具有非正曲率.

证明　直接的计算表明

$$\frac{d}{dt}\|J(t)\| = \frac{\langle J,J'\rangle}{\|J\|}$$

和

$$\frac{d^2}{dt^2}\|J\| = \frac{[\langle J, J''\rangle\|J\| + \langle J', J'\rangle\|J\|] - \dfrac{\langle J, J'\rangle^2}{\|J\|}}{\|J\|^2}$$
$$= \frac{-\langle R(\sigma', J)\sigma', J\rangle\|J\|^2 - \langle J, J'\rangle^2 + \|J'\|^2\|J\|^2}{\|J\|^3}.$$

(i) 当曲率为非正时, $-\langle R(\sigma', J)\sigma', J\rangle \geqslant 0$, 从而

$$\frac{d^2\|J\|}{dt^2} \geqslant 0.$$

(ii) 反之, 如 (6.4) 对所有 Jacobi 场成立. 对任何 $p = \sigma(0)$, $E \perp \sigma'(0)$, 我们需要证明

$$K(\sigma', E) = \langle R(\sigma', E)\sigma',\ E\rangle \leqslant 0.$$

取 σ 上的一个 Jacobi 场 $\{J(t)\}$ 满足 $J(0) = E, J'(0) = 0$. 则由上述计算得出

$$0 \leqslant \frac{d^2\|J\|}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{-\langle R(\sigma', E)\sigma', E\rangle \cdot 1 - 0 + 0}{1}$$
$$= -\langle R(\sigma', E)\sigma', E\rangle.$$

证毕.

推论 6.5 (距离函数的凸性) 假设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是个 Cartan-Hadamard 流形, σ_i: $\mathbb{R} \to \tilde{M}^n$ 是测地线, 这里 $i = 0, 1$. 则距离函数

$$h(t) = h_{\sigma_0,\sigma_1}(t) = d(\sigma_0(t), \sigma_1(t))$$

必是个凸函数.

证明 我们只需证明对任何 $a < b$, 不等式

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[h(a) + h(b)]. \tag{6.5}$$

令 η_a: $[0,1] \to \tilde{M}^n$ 为连 $\sigma_0(a)$ 到 $\sigma_1(a)$ 的测地线段. 同样地, 令 η_b: $[0,1] \to \tilde{M}^n$ 为从 $\sigma_0(b)$ 到 $\sigma_1(b)$ 的测地线段, 取 $F(s,\cdot)$: $[a,b] \to \tilde{M}$ 为从 $\eta_a(s)$ 到 $\eta_b(s)$ 为测地线段 (图 19). 则我们有一个单参数测地线族

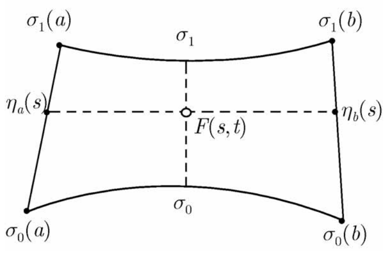


图 19

$$F\colon\ [0,1]\times[a,b]\to\tilde{M},$$
$$(s,t)\to F(s,t).$$

根据定义, 向量场 $\left\{\dfrac{\partial F}{\partial s}(s_0,t)\right\}_{t\in[a,b]}$ 是沿测地线段 $F(s_0,\cdot)$: $[a,b]\to\tilde{M}^n$ 上的一个 Jacobi 场. 根据定理 (6.4) 得出: $t\to\left\|\dfrac{\partial F}{\partial s}(s_0,t)\right\|$ 是关于 t 的一个凸函数, 从而

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial F}{\partial s}\left(s,\frac{a+b}{2}\right)\right\|&\leqslant\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial F}{\partial s}(s,a)\right\|+\left\|\frac{\partial F}{\partial s}(s,b)\right\|\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{d\eta_a}{ds}\right\|+\left\|\frac{d\eta_b}{ds}\right\|\right]\end{aligned}\tag{6.6}$$

成立.

记 $L(\eta)$ 为曲线 η 的长度, 最后我们得出

$$\begin{aligned}h\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant L\left(F\left(\cdot,\frac{a+b}{2}\right)\right)&=\int_0^1\left\|\frac{\partial F}{\partial s}\left(s,\frac{a+b}{2}\right)\right\|ds\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_0^1\left\|\frac{d\eta_a}{ds}\right\|ds+\int_0^1\left\|\frac{d\eta_b}{ds}\right\|ds\right]\\&=\frac{1}{2}[h(a)+h(b)].\end{aligned}$$

证毕.

Cartan-Hadamard 流形中距离函数的凸性有个直接的应用.

推论 6.6　假设 Ω 是 Cartan-Hadamard 流形 $\tilde{M}^n$ 中的一个闭凸集, 则

(i) 对任一点 $x\in\tilde{M}^n$, 都存在唯一的点 $\mathcal{P}_\Omega(x)\in\Omega$ 使得 $d(x,\mathcal{P}_\Omega(x))=d(x,\Omega)$;

(ii) 最近点投影

$$\mathcal{P}_\Omega\colon\ \tilde{M}^n\to\Omega,$$
$$x\to\mathcal{P}_\Omega(x)$$

是距离减少映射.

证明　(i) 对任何一点 $x\in\tilde{M}^n$, 因为 Ω 是闭集, 故至少存在一点 $y_x\in\Omega$ 使得 $d(x,y_x)=d(x,\Omega)$. 反设有两点 y_x 和 $y_x^*\in\Omega$, 这里 $d(x,y_x^*)=d(x,\Omega)$. 设 σ_{yy^*} 为连 y_x 和 y_x^* 的测地线段, z 为 σ_{yy^*} 的中点. 再令 η: $[0,l]\to\tilde{M}^n$ 为从 z 到 x 的测地线, 这里 $l=d(x,z)$. 两条测地线段 σ_{yy^*} 和 η 相交于 σ_{yy^*} 的中点 z, 从而得两个新的测地三角形 $\triangle_{zxy_x}$ 和 $\triangle_{zxy_x^*}$, 其相应于在 z 处的内角为 α 和 α^*(图 20). 显然 $\alpha+\alpha^*=\pi$. 所以至少有一个大于或等于 $\dfrac{\pi}{2}$. 不妨设 $\alpha\geqslant\dfrac{\pi}{2}$. 则我们由 Cosine 定律得出

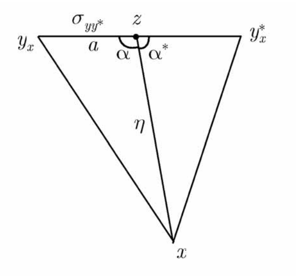


图 20

$$d(x,y_x)\geqslant\sqrt{l^2+a^2-2al\cos\alpha}>l=d(z,x).$$

除非 $d(y_x,z)=a=0$. 这和 y_x 是 Ω 中离 x 最近的一点矛盾. 综上所述, $d(y_x,y_x^*)=2a=0$, Ω 中离 x 最近的一点是唯一点.

(ii) 我们只需证明

$$d(x,y)\geqslant d(\mathcal{P}_\Omega(x),\mathcal{P}_\Omega(y)). \tag{6.7}$$

此时有三种可能. 1) 当 $\{x,y\}\subset\Omega$ 都 Ω 的点, 不等式 (6.7) 自然成立. 2) 当 $\{x,y\}$ 中有一点 $x\in\Omega$, 但 $y\notin\Omega$. 此时我们考虑测地三角形 $\triangle_{xy\mathcal{P}_\Omega(y)}$. 由第一变分公式得出该三角形 $\triangle_{xy\mathcal{P}_\Omega(y)}$ 在 $\mathcal{P}_\Omega(y)$ 处的内角 θ 必大于或等于 $\dfrac{\pi}{2}$ (这里我们假设 $\mathcal{P}_\Omega(y)$ 是 Ω 中离 y 最近的点). 由 Cosine 定律, 我们看到

$$\begin{aligned}d^2(x,y)&\geqslant d^2(x,\mathcal{P}_\Omega(y))+d^2(y,\mathcal{P}_\Omega(y))-2d(x,\mathcal{P}_\Omega(y))d(y\mathcal{P}_\Omega(y))\cos\theta\\&\geqslant d^2(x,\mathcal{P}_\Omega(y)),\end{aligned}$$

从而 (6.7) 在这种情况下成立. 3) 最后一种情况为 $\{x,y\}\subset\tilde{M}^n\backslash\Omega$. 令 σ_1 为从 $\mathcal{P}_\Omega(x)$

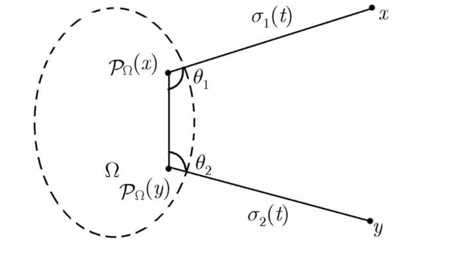


图 21

到 x 的测地线段, σ_1: $[0,1]\to\tilde{M}^n$. 类似地, 令 σ_2: $[0,1]\to\tilde{M}^n$ 为从 $\mathcal{P}_\Omega(y)$ 到 y 的测地线段. 记 θ_1 为测地三角形 $\triangle_{x\mathcal{P}_\Omega(x)\mathcal{P}_\Omega(y)}$ 在 $\mathcal{P}_\Omega(x)$ 处的内角, 类似地定义 θ_2(图 21). 根据第一变分公式和 $\mathcal{P}_\Omega(\cdot)$ 的定义, 我们 $\theta_1\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\theta_2\geqslant\dfrac{\pi}{2}$. 最后我们令 $h(t)=d(\sigma_1(t),\sigma_2(t))$. 再用第一变分公式, 我们得出 $h'(0)=-\cos\theta_1-\cos\theta_2\geqslant 0$. 推论 6.5 告诉我们 h 是凸函数, $h''(0)\geqslant 0$. 从而 $h'(t)\geqslant 0$ 对所有 $t\geqslant 0$, h: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是递增函数. 即有

$$d(\mathcal{P}_\Omega(x),\mathcal{P}_\Omega(y))=h(0)\leqslant h(1)=d(x,y).$$

证毕.

我们要指出的是曲率 $K_{M^n}\leqslant 0$ 的条件在推论 6.6 中起了非常重要的作用, 对正曲率流形 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$, 推论 6.6 的结论不一定成立. 例如取 Ω 为单位球面 $S^2(1)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 的上半球面. Ω 是个凸集, 可是如取 $q=(0,0,1)$ 为北极, 则无法定义 $\mathcal{P}_\Omega(q)$ 使得 $\mathcal{P}_\Omega$: $S^2(1)\to\Omega$ 为距离减少映射.

6.1.3　平坦条纹定理

下面我们讨论无界凸集之间几何关系. 让我们首先回忆一下在由子集形成的模空间上的距离函数. 对 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 中的任何两个子集 A 和 B, 我们定义两者间 Hausdorff 距离为

$$Hd(A,B)=\inf\{r>0|U_r(A)\supset B,U_r(B)\supset A\},$$

这里 $U_r(A)=\{x\in\tilde{M}^n|d(x,A)<r\}$ 是 A 的 r 邻域.

两条具有弧长参数的测地线 $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 称为平行的当且仅当 $Hd(\sigma_1(\mathbb{R}),\sigma_2(\mathbb{R}))<+\infty$. 如果两个全测地集 Y_1 和 Y_2 满足 $Hd(Y_1,Y_2)<+\infty$, 则称两测地集平行 (全测地集就是凸集).

定理 6.7 (平坦条纹定理)　设 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 为 Cartan-Hadamard 流形. 则下列成立.

(1) 如果 σ_1 和 σ_2 是 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 中的两条平行测地线并且 $a=Hd(\sigma_1,\sigma_2)$, 则存在一个全测地的等距嵌入 φ: $\mathbb{R}\times[0,a]\to\tilde{M}^n$ 使得 $\varphi(\mathbb{R}\times\{0\})=\sigma_1(\mathbb{R})$ 和 $\varphi(\mathbb{R}\times\{a\})=\sigma_2(\mathbb{R})$. 即两张平行测地线必张成一个全测地的平坦条纹.

(2) (Eberlein, 1982)　设 Y_1 和 Y_2 是两个完备的平行全测地集, $a=Hd(Y_1,Y_2)$. 则存在一个全测地的等距嵌入 φ: $Y_1\times[0,a]\to\tilde{M}^n$ 使得 $\varphi(Y_1\times\{0\})=Y_1$ 和 $\varphi(Y_1\times\{a\})=Y_2$.

证明　很显然,(1) 是 (2) 的一个特殊情形. 我们只需证明 (2).

全测地完备集必是一个闭的凸集. 如果 σ_i: $\mathbb{R}\to Y_i$ 中的一条测地线. 根据推论 6.5, 函数 $h_1(t)=d(\sigma_1(t),Y_2)$ 是个凸函数. 但是根据假设 $Hd(Y_1,Y_2)=a$ 有界,

所以 h_1：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是个有上界的凸函数. h_1 必为常函数 $h_1(t) = a$ 对所有 a 成立. 类似地, 我们可以证明 $h_2(t) = a$, 这里 $h_2(t) = d(\sigma_2(t), Y_1)$.

因 Y_i 是一个闭凸集, 故由推论 6.6 得出投影映射 $\mathcal{P}_{Y_i}$：$\tilde{M}^n \to Y_i$ 是距离减少映射. 我们首先要证明 $(\mathcal{P}_{Y_1} \circ \mathcal{P}_{Y_2})$ 为 Y_1 的恒等映射. 任取 $x_1 \in Y_1$, 若 $x_1' = (\mathcal{P}_{Y_1} \circ \mathcal{P}_{Y_2})(x_1) \neq x_1$. 我们考虑以三点 $\{x_1, x_1', \mathcal{P}_{Y_2}(x_1)\}$ 为顶点的三角形. 该三角形在顶点 x_1' 的内角 θ' 必然大于或等于 $\dfrac{\pi}{2}$. 由 Cosine 定律,

$$a = d(x_1, \mathcal{P}_{Y_2}(x_1)) \geqslant \sqrt{a^2 + d(x_1', x_1)^2 - 2ad(x_1', x_1)\cos\theta'} > a.$$

除非 $x_1' = x_1$, 否则严格不等式成立, 矛盾. 因此 $\mathcal{P}_{Y_1} \circ \mathcal{P}_{Y_2}\Big|_{Y_1} = id_{Y_1}$, 同样地, 我们可以证明

$$\mathcal{P}_{Y_2} \circ \mathcal{P}_{Y_1}\Big|_{Y_2} = id_{Y_2}.$$

因为 $\mathcal{P}_{Y_2}$ 和 $\mathcal{P}_{Y_1}$ 都是距离不增映射, 由上面等式得 $\mathcal{P}_{Y_1}|_{Y_2}$ 是等距. 最后我们定义

$$\begin{aligned} \varphi\text{：}\ & Y_1 \times [0, a] \to \tilde{M}^n, \\ & (y_1, t) \to \sigma_{y_1, \mathcal{P}_{Y_2}(y_1)}(t), \end{aligned}$$

这里 $\sigma_{x,y}$：$[0, l] \to \tilde{M}$ 代表具有单位速度的从 x 到 y 的测地线. 任给 y_1 和 y_1', 我们考虑另外两点 $y_2 = \mathcal{P}_{Y_2}(y_1)$ 和 $y_2' = \mathcal{P}_{Y_2}(y_1')$, 这里 $\{y_1, y_1'\} \subset Y_1$. 因为 Y_1 和 Y_2 都是凸集, 考虑由顶点 $\{y_1, y_1', y_2', y_2\}$ 张成的一维四边形 Σ(图 22), 再因为 $\mathcal{P}_{Y_1} \circ \mathcal{P}_{Y_2}|_{Y_1} = id_{Y_1}$ 和 $\mathcal{P}_{Y_2} \circ \mathcal{P}_{Y_1}|_{Y_2} = id_{Y_2}$. 这个四边形 Σ 在各顶点的内角必大于或等于 $\dfrac{\pi}{2}$. 由三角形的内角和定理 (推论 6.3) 得出 Σ 的内角和必小于或等于 2π. 从而得出各顶点的内角恰为 $\dfrac{\pi}{2}$. Σ 的内角和为 2π 当且仅当 Σ 张成一个全测地的矩形. 而且张成的矩形恰恰是 $\varphi(\sigma_{y_1, y_1'} \times [0, a])$ 从而我们断定 φ：$Y_1 \times [0, a] \to \tilde{M}^n$ 是所期望的全测地等距嵌入.　证毕.

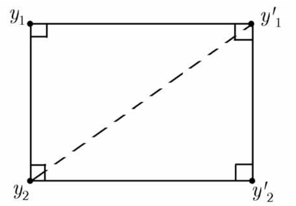


图 22

在以后几节中我们要用上面讨论的几个工具讨论非正曲率流形的几何和拓扑结构, 我们从基本群的无挠性着手.

§6.2　基本群、Preissmann 和丘成桐定理

从 Cartan-Hadamard 定理看出, 任何完备的非正负曲率的流形 M^n 的万有覆盖空间必同胚于欧氏空间, 从而 M^n 无高维同伦群, 即 M^n 是个 $K(\pi,1)$ 空间. 它的同胚类由它的基本群 $\pi_1(M^n)$ 唯一决定. 非正曲率流形 M^n 的基本群 $\pi_1(M^n)$ 有其特殊的性质.

6.2.1　基本群的无挠性及 Cartan 不动点定理

假设 (M^n,g) 是个完备的 Riemann 流形, $\varphi\in\pi_1(M^n)$ 是个非平凡元, 即 $\varphi\neq 1$. 我们要证明对所有正整数 $k,\varphi^k\neq 1$. 即有 φ 生成的子群 $\langle\varphi\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}$. 这个结论是 Cartan 不动点定理的一个推论.

定理 6.8 (Cartan 不动点定理)　设 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 是 Cartan-Hadamard 流形, G 是 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 的一个等距子群 $G\subset \mathrm{Iso}(\tilde{M}^n)$. 再假设存在 $\tilde{M}^n$ 中的一点 p 使得 G 作用在 p 上的轨迹有界, 则 G 在 $\tilde{M}^n$ 中必有一个不动点.

证明　取轨道 $G\{p\}$ 的闭包为 A. 因为 A 闭有界则 A 必为一个紧集. 考虑下列函数

$$\begin{aligned} r_A\colon\quad & \tilde{M}^n\to\mathbb{R},\\ & x\to\max_{a\in A}\{(d(x,a))\}. \end{aligned}$$

再因为 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 是 Cartan-Hadamard 流形, $d(\cdot,a)$ 是凸函数, 所以 r_A 仍是凸函数. 当 $x\to\infty$ 时, 则 $r_A(x)\to\infty$. 故 r_A 有个全局的最小点 x_0. 我们断定 x_0 是 r_A 唯一的最小点, 这可以由下列方法论证.

反设 r_A 的最小点不唯一, 存在 $x_0^*\in\tilde{M}^n$ 使得 $r_A(x_0^*)=r_A(x_0)=\inf\limits_{x\in\tilde{M}^n} r_A(x)$. 令 $\sigma_{x_0x_0^*}$ 为连 x_0 到 x_0^* 的测地线段, 取该线段的中点 $\hat{y}$, 则由 Cosine 定律不难证明 $d(\hat{y},a)<\max\{d(x_0,a),d(x_0^*,a)\}$ 这里如图 23 中所示 $\theta_a+\theta_a^*=\pi$, $\max\{\theta_a,\theta_a^*\}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$. 故 $r_A(\hat{y})<r_A(x_0)=r_A(x_0^*)$, 矛盾. 从而 r_A 有唯一的最小点 x_0.

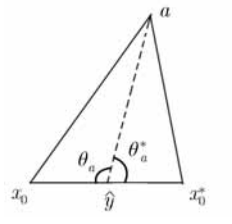


图 23

我们观察到 $G(A) = A$. 所以 $r_A(G(x)) = r_A(x)$. $G(x_0)$ 也是 r_A 的最小点, 从而 $G\{x_0\} = \{x_0\}$, 最小点 x_0 为 G 的一个不动点. 证毕.

推论 6.9 如果 (M^n, g) 是个完备的非正曲率流形, 则 M^n 的基本群 $\pi_1(M^n)$ 是个无挠群. 任何非平凡元素 φ 生成的子群 $\langle\varphi\rangle$ 必同构于整数群 $\mathbb{Z}$.

证明 令 $\tilde{M}^n$ 为 M^n 的万有覆盖空间, $\tilde{g}$ 为 $\tilde{M}^n$ 上的 g 的提升度量. 所以基本群 $\pi_1(M^n)$ 是 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的一个离散等距子群. 假设 $\varphi \in \pi_1(M^n)$, $\varphi \neq 1$ 为一个非平凡元素, 令 $G = \langle\varphi\rangle$ 为 φ 生成的子群. 若 G 是有限群, 则 $G\{p\}$ 是有界点集. G 在 $\tilde{M}^n$ 中必有一个不动点 x_0. 但是非平凡子群 $G \subset \pi_1(M^n)$ 在 $\tilde{M}^n$ 上无不动点, 矛盾. 由此, $G = \langle\varphi\rangle$ 必无限, 且同构于 $\mathbb{Z}$. 证毕.

6.2.2 交换子群和 Preissmann 定理

假设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是个 Cartan-Hadamard 流形, 设 φ 是 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的等距变换, 我们令

$$\mathrm{Min}(\phi) = \{x \in \tilde{M}^n | d(x, \phi(x)) = \inf_{y \in \tilde{M}^n} d(y, \phi(y))\}.$$

如果 G 是 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的一个等距子群, 则令

$$\mathrm{Min}(G) = \bigcap_{\phi \in G} \mathrm{Min}(\phi).$$

下面的定理在研究紧非正曲率流形中起了很重要的作用.

定理 6.10 设 φ 和 ψ 为 $\pi_1(M^n)$ 的两个可交换元素, 其生成的子群同构于 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 假设 (M^n, g) 是紧的具有非正曲率的流形, 则下列结论成立.

(1) $\mathrm{Min}(\phi)$ 是 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 中的凸集且等距于 $\Omega \times \mathbb{R}$; φ 作用在 $\Omega \times \mathbb{R}$ 是在 $\mathbb{R}$ 因子上的平行移动.

(2) $\psi[\mathrm{Min}(\phi)] = \mathrm{Min}(\phi)$, 从而 $\mathrm{Min}(\phi) \bigcap \mathrm{Min}(\psi)$ 非空, 且 $\mathrm{Min}(\phi) \bigcap \mathrm{Min}(\psi)$ 等距同构于 $D \times \mathbb{R}^2$. 子群 $\langle\psi, \varphi\rangle$ 作用在 $\mathbb{R}^2$ 上是平移的.

证明 (1) 任取 $x \in \mathrm{Min}(\phi)$, 根据定义 $d(x, \varphi(x)) = c = \inf_{y \in \tilde{M}^n} \{d(y, \varphi(y))\}$. 我们以前指出过 x 是 $\delta_\varphi(y) = d(y, \varphi(y))$ 的临界点当且仅当 $\{x, \varphi^{-1}(x), \varphi(x)\}$ 落在同一条测地线上 σ_x: $\mathbb{R} \to \mathrm{Min}(\varphi)$. 测地线 σ_x 满足 $\sigma_x(0) = x$ 和 $\varphi(\sigma_x(t)) = \sigma_x(t + c)$. 任取 $\{x, y\} \subset \mathrm{Min}(\phi)$, 我们有相对应的测地线 $\{\sigma_x, \sigma_y\}$. 因为 φ 是等距的, 所以函数 $h(t) = d(\sigma_x(t), \sigma_y(t))$ 具有下列性质: $h(kc) = d(\sigma_x(kc), \sigma_y(kc)) = d(\varphi^k(\sigma_x(0))), \varphi^k(\sigma_y(0))) = d(x, y) = b$ 对任何整数 k 成立. 我们已经证明 $h(t)$ 是关于 t 的凸函数,

对任何实数 t, 取两个整数 $\{k_1, k_2\}$ 使得 $k_1 < t < k_2$. 由 h 的凸性质, 我们有

$$h(t) \leqslant \max\{h(k_1), h(k_2)\} = b,$$

从而 $Hd(\sigma_x(\mathbb{R}), \sigma_y(\mathbb{R})) = a \leqslant b$ 有界. 根据平坦条纹定理 6.7 得出存在一个全测地的等距嵌入 η: $\mathbb{R}\times[0,a] \to \tilde{M}^n$ 使得 $\eta(\mathbb{R}\times\{0\}) = \sigma_x(\mathbb{R})$ 和 $\eta(\mathbb{R}\times\{b\}) = \sigma_y(\mathbb{R})$. 更进一步, 对每一个 $s \in [0,a], \eta(\cdot, s)$: $\mathbb{R} \to \tilde{M}^n$ 是条平行于 σ_x 的测地线. 不难证明 φ 保持测地线 $\eta(\mathbb{R}\times\{s\})$ 不变, $\eta(\mathbb{R}\times\{s\}) \subset \mathrm{Min}(\varphi)$. 最后我们得出 $\eta(\mathbb{R}\times[0,a]) \subset \mathrm{Min}(\varphi)$.

因为 $\delta_\varphi(x) = d(x, \varphi(x))$ 是个函数, 当 $c = \inf\limits_{y\in\tilde{M}^n}\{\delta_\varphi(y_1)\}$ 时, $\mathrm{Min}(\varphi) = \delta_\varphi^{-1}([0,c])$ $= \delta_\varphi^{-1}(\{c\})$ 必是一个凸集. 固定 $x_0 \in \mathrm{Min}(\varphi)$, 我们取子集

$$\Omega = \{y \in \mathrm{Min}(\varphi) | \langle \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} y, \sigma'_{x_0}(0)\rangle = 0\}.$$

由上述讨论和平坦条纹定理推出 $\mathrm{Min}(\varphi)$ 等距于 $\Omega\times\mathbb{R}$.

(2) 因为 ψ 和 φ 可交换, 我们注意到

$$\delta_\varphi(\psi(x)) = d(\psi(x), \varphi\psi(x)) = d(\psi(x), \psi\varphi(x)) = d(x, \varphi(x)) = \delta_\varphi(x),$$

所以 $\psi(\mathrm{Min}(\varphi)) = \mathrm{Min}(\varphi)$.

由 (1) 得出, $\mathrm{Min}(\varphi)$ 是凸集. 令 $\mathcal{P}_\varphi$: $\tilde{M}^n \to \mathrm{Min}(\varphi)$ 为投影映射, 由推论 6.6 得出 $\mathcal{P}_\varphi$ 是距离减少映射, 任取 $x \in \tilde{M}^n$, 因为 $\psi\mathrm{Min}(\varphi) = \mathrm{Min}(\varphi)$, 不难证明

$$\mathcal{P}_\varphi(\psi(x)) = \psi\mathcal{P}_\varphi(x). \tag{6.8}$$

所以我们注意到

$$\begin{aligned}\delta_\psi(\mathcal{P}_\varphi(x)) &= d(\mathcal{P}_\varphi(x), \psi\mathcal{P}_\varphi(x)) \\ &= d(\mathcal{P}_\varphi(x), \mathcal{P}_\varphi(\psi(x))) \\ &\leqslant d(x, \psi(x)) = \delta_\psi(x).\end{aligned} \tag{6.9}$$

由 (6.6) 得知 $\mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi) \neq \varnothing$, 其实我们有 $\mathcal{P}_\varphi(\mathrm{Min}(\psi)) = \mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$ 非空集 (因为 $\mathrm{Min}(\psi)$ 是非空集, 当然 $\mathcal{P}_\varphi(\mathrm{Min}(\psi)$(非空)).

任取一点 $x \in \mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$, 由 (1) 的讨论, 分别存在测地线 σ_x^φ 和 σ_x^ψ, 使得 $\sigma_x^\varphi(0) = x$ 和 $\sigma_x^\psi(0) = x$, 并且 φ 保持 σ_x^φ 不变, ψ 保持 σ_x^ψ 不变. 由上述讨论知 $\psi(\mathrm{Min}(\varphi)) \subset \mathrm{Min}(\varphi)$, 所以 $\psi\circ\sigma_x^\varphi$ 是平行于 σ_x^φ 的测地线. 应用平坦条纹定理, 我们可以证明 $\{\psi^k\circ\sigma_x^\varphi(\mathbb{R})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 张成一个全测地的欧氏平面. 从而对每个 $x \in\mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$, 我们都有一个全测地的欧氏平面 $\mathbb{R}_x^2 \subset \mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$, 这里 $x \in \mathbb{R}_x^2$, $\langle\psi, \varphi\rangle$ 保持 $\mathbb{R}_x^2$ 不变. 令 $Y_1 = \mathbb{R}_x^2$, 应用平坦条纹定理, $\mathbb{R}_{x_1}^2$ 和 $\mathbb{R}_{x_2}^2$ 必平行, 并张成一个全测地集等距于 $\mathbb{R}_{x_1}^2 \times [0,a]$, 这里 $a = Hd(\mathbb{R}_{x_1}^2, \mathbb{R}_{x_2}^2)$.

取定一点 $x_0 \in \mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$. 最后我们令

$$D = \{y \in \mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi) | \langle \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} y, \mathbb{R}^2_{x_0}\rangle = 0\}.$$

根据上述讨论, 我们得出 $\mathrm{Min}(\varphi)\bigcap\mathrm{Min}(\psi)$ 等距于 $D \times \mathbb{R}^2_{x_0}$.　证毕.

推论 6.11 (Preissmann 定理)　假设 (M^n, g) 是个紧的具有负曲率的 Riemann 流形, 则它的基本群 $\pi_1(M^n)$ 的任何交换子群必同构于整数群 $\mathbb{Z}$.

证明　因为曲率为负, 由 Cartan 不动点定理得出, $\pi_1(M^n)$ 是个无挠群. 如果 H 是 $\pi_1(M^n)$ 的非平凡的交换子群, 任何 H 中的两元 $\{\varphi, \psi\} \subset H$, $\{\varphi, \psi\}$ 张成的子群必为 $\mathbb{Z}$, 否则 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 就有全测地的欧氏空间 $\mathbb{R}^2$, 这和负曲率假设矛盾. 故必有 $H = \langle\varphi_0\rangle \cong \mathbb{Z}$, 这里 $l_{\varphi_0} = \inf\limits_{\substack{\varphi\in H\\ \varphi\neq 1}}\{l_\varphi\}$ 和 $l_\varphi = \inf\limits_{y\in\tilde{M}^n}\{\delta_\varphi(y)\}$.　证毕.

6.2.3　可解子群和丘成桐的一个定理

微分几何中的一个重要问题是要对非正曲率的基本群作出比较精确的刻画. 例如找出什么样的群才能成为一个非正曲率的基本群.

我们首先从可解群谈起. 设群 G 有一个递减子群序列　$G = G_k \triangleright G_{k-1} \triangleright G_{k-2} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = 1$ 满足：

(i) G_i 是 G_{i+1} 的正规子群,

(ii) 商群 G_{i+1}/G_i 是个交换群,

则称 G 为一个可解群.

按照定义, 每个交换群都是可解群, 每个幂零群是个可解群. 例如

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & k, & l \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

是个幂零群, 从而是个可解群. 显然 G 不是个交换群. 我们不禁要问如上所述的幂零群会不会成为一个紧非正曲率的流形的基本群? 答案是否定的, 见下面的定理 6.13.

在 1968 年, J.Wolf 在 Preissmann 定理的启发下提出了下列猜测：如果 (M^n, g) 是个紧非正曲率流形, 且假设 $\pi_1(M^n)$ 是个可解群, 则 (M^n, g) 必为一个平坦流形, 从而 M^n 必被 n 维环面覆盖, $\pi_1(M^n)$ 含有一个子群同构于 $\mathbb{Z}^n$ 且 $|\pi_1(M^n)/\mathbb{Z}^n|$ 有限, 即基本群 $\pi_1(M^n)$ 必须是个所谓的 Bieberbach 群.

这个猜测在 1971 年被正在读研究生二年级的丘成桐解决. 在丘成桐工作的基础上, Lawson- 丘成桐和 Gromoll-Wolf 得出了下节 (§6.3) 所述的分解定理, 见 [Y1],

[LY] 和 [GW].

首先将定理 6.10(2) 的证明中所得出的一个结论再概括为如下：

推论 6.12 (平坦环面定理)　设 (M^n, g) 为一个紧的非正曲率流形, 则 $\pi_1(M^n)$ 有个子群同构于 $\mathbb{Z}^k$ 当且仅当 M^n 包含一个 k 维全测地浸入的平坦环面.

证明　显然如果 $f\colon T^k \to M^n$ 是个全测地浸入和 T^k 是个 k 维平坦环面, 则被诱导映射 $f_*\colon \pi_1(T^k) \to \pi_1(M^n)$ 是单一的 (因为 f 是全测地浸入, f 的提升, $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^k \to \tilde{M}^n$ 是全测地嵌入). 因此, $\pi_1(M^n)$ 存在一个子群同构于 $\mathbb{Z}^k$.

反过来, 如果 $\pi_1(M^n)$ 有个子群 G 同构于 $\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_k = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$, 则由定理 6.10(2) 及其证明可得 $\mathrm{Min}(G) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Min}(\alpha_i)$ 非空, 且有 $\mathrm{Min}(G)$ 等距同构于 $D \times \mathbb{R}^k$, 这里 G 作用在 $\mathbb{R}^k$ 因子上是平移. 记 $\pi\colon \tilde{M}^n \to M$ 为万有覆盖映射. 任取一点 $x_0 \in D$, 则 $\pi(\{x_0\} \times \mathbb{R}^k) = \Sigma^k$ 是个全测地的 k 维平坦环面.　证毕.

下面我们来叙述丘成桐早年的一个定理.

定理 6.13 (丘成桐 [Y1])　设 (M^n, g) 是个紧的具有非正曲率的 Riemann 流形, 且假设 G 是 M^n 的基本群 $\pi_1(M^n)$ 的一个可解子群, 则 $\mathrm{Min}(G)$ 非空且等距同构于 $D \times \mathbb{R}^k$ 满足下列性质：

(1) $G(\{d\} \times \mathbb{R}^k) = \{d\} \times \mathbb{R}^k$, 对所有 $d \in D$ 成立,

(2) $\{d\} \times \mathbb{R}^k / G$ 是个紧平坦流形,

(3) $\Phi = \{\varphi \in G | \Phi$ 在 $\{d\} \times \mathbb{R}^k$ 作用为恒等$\}$是个有限群.

特别地, G 为有限生成且 G 包括一个子群 H 同构于 $\mathbb{Z}^k$ 使得 $|G/H| < \infty$.

证明　设 $\varphi\colon (\tilde{M}^n, g) \to (\tilde{M}^n, g)$ 是个同构. 如果 $\mathrm{Min}(\varphi)$ 非空则称 φ 是半单的. 如果 G 是个可解群, 且设 $G = G_m \rhd G_{m-1} \rhd \cdots \rhd G_0 = \{1\}$ 是个可解系列, 则称 m 为 G 的可解系列的长度.

如果 $m = 1$, 即 G 为交换子群, 由定理 6.12(2) 和推论 6.12, 上述结论 (1)~(3) 显然成立.

现在我们用数学归纳法证明下列断言：

(6.13.A)　假设 X 是个 Cartan-Hadamard 流形, Ω 是 X 中的一个非空凸子集, 且假设 G 是由半单元组成的度量空间 X 的等距可解子群, $G(\Omega) = \Omega$. 则 $\mathrm{Min}(G) \bigcap \Omega$ 非空, 更进一步的有上述结论 (1)~(3) 成立.

我们已经说明断言 (6.13.A) 当 $m = 1$ 时成立. 假设断言 (6.13.A) 对所有可解系列长度 $\leqslant m - 1$ 的可解子群 A 成立. 我们设

$$G = G_m \rhd G_{m-1} = A \rhd G_{m-2} \rhd \cdots \rhd G_0 = \{1\},$$

从而 $\mathrm{Min}(A) = D_A \times \mathbb{R}^{k_A}$ 是个度量分解, 根据假设 G/A 是交换子群. 又因为 A 是 G 的正规子群, 所有 $\varphi \in G$ 有 $\varphi^{-1}A\varphi = A$. 注意到

$$\delta_\psi(\varphi(x)) = d(\varphi(x), \psi\varphi(x)) = d(x, \varphi^{-1}\psi\varphi(x)) = \delta_{\varphi^{-1}\psi\varphi}(x),$$

从而有 $\varphi\mathrm{Min}(\psi) = \mathrm{Min}(\varphi^{-1}\psi\varphi)$. 故我们推出

$$\varphi\mathrm{Min}(A) = \mathrm{Min}(\varphi^{-1}A\varphi) = \mathrm{Min}(A)$$

和 $G(\mathrm{Min}(A)) = \mathrm{Min}(A)$. 因此, 商群 $G' = G/A$ 诱导一个在 D_A 上作用的等距子群且 $G'(D_A) = D_A$.

再应用 (6.13.A), 我们得出 $\mathrm{Min}(G') = D \times \mathbb{R}^{k_{G'}}$, 最后, 我们推出 $\mathrm{Min}(G) = D \times \mathbb{R}^{k_{G'}} \times \mathbb{R}^{k_A} = D \times \mathbb{R}^k$ 且上述断言 (1)~(3) 成立. 证毕.

§6.3 Gromoll-Wolf 和 Lawson-Yau 分解定理

我们上面已经指出任一个完备的非正曲率的流形 M^n 是个 $K(\pi, 1)$ 空间. 人们当然要问怎样从基本群 $\pi_1(M^n)$ 的代数结构导出有关的几何性质. 下面定理说明紧非正曲率流形的基本群的分解有时会导致度量空间的分解.

定理 6.14 (Gromoll-Wolf, Lawson-Yau) 设 (M^n, g) 为紧的具有非正曲率的流形, 且假设 $\pi_1(M^n) = \mathit{\Gamma}_1 \times \mathit{\Gamma}_2$ 没有非平凡的中心元. 则 (M^n, g) 等距地分解为 $(M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ 且满足 $\pi(M_i) = \mathit{\Gamma}_i \quad (i = 1, 2)$.

证明 定理 6.14 的证明分成三步, 我们把每一步写成一个引理. 这三个引理我们会在下节和本书的其他地方用到.

设 A 是 Cartan-Hadamard 流形 X 中的一个子集, 我们令 $\mathrm{Con}(A)$ 为子集 A 在 X 中的凸包.

引理 6.15 设 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 是 Cartan-Hadamard 流形, $\pi_1(M^n) = \mathit{\Gamma}_1 \times \mathit{\Gamma}_2$ 和 $M^n = \tilde{M}^n/(\mathit{\Gamma}_1 \times \mathit{\Gamma}_2)$ 是个紧且具有非正曲率的流形. 如果 $\mathit{\Gamma}_2$ 是有限生成且无非平凡的中心元, 则对任何 $x_0 \in \tilde{M}^n$,$\mathrm{Con}((\mathit{\Gamma}_1\{x_0\})/\mathit{\Gamma}_1)$ 是个紧的商空间.

证明 我们用反证法. 反设存在一个序列 $\{x_i\} \subset \mathrm{Con}(\mathit{\Gamma}_1\{x_0\})$, 使得 $d(x_i, \mathit{\Gamma}_1\{x_0\}) \to \infty$. 因为 M^n 紧, 从而存在 $\{\varphi_i\} \subset \mathit{\Gamma}_1$ 和 $\{\psi_i\} \subset \mathit{\Gamma}_2$ 使得 $d(\varphi_i\psi_i(x_0), x_i) \leqslant d$. 我们注意到

$$\begin{aligned} d(\psi_i(x_0), x_0) &= d(\varphi_i\psi_i(x_0), \varphi_i(x_0)) \\ &\geqslant d(x_i, \varphi_i(x_0)) - d(\varphi_i\psi_i(x_0), x_i) \\ &\geqslant d(x_i, \mathit{\Gamma}_1\{x_0\}) - d \to \infty, \end{aligned}$$

所以我们不妨设 $\{\psi_i\}$ 满足当 $i \neq j$ 时, $\psi_i \neq \psi_j$.

令 $\{\hat{\psi}_1, \cdots, \hat{\psi}_m\}$ 为 $\varGamma_2$ 的一组生成元. 因 $\varGamma_2$ 和 $\varGamma_1$ 可交换. 不难论证

$$\sup_{y \in \mathrm{Con}(\varGamma_1\{x_0\})} d(y, \hat{\psi}_j(y)) \leqslant r_j = d(x_0, \hat{\psi}_j(x_0)),$$

从而对每个固定 j, 我们有

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_i^{-1}\hat{\psi}_j\psi_i}(x_0) &= d(\hat{\psi}_j\psi_i(x_0), \psi_i(x_0)) \\
&\leqslant d(\hat{\psi}_j\psi_i(x_0), \hat{\psi}_j\varphi_i^{-1}(x_i)) + d(\hat{\psi}_j\varphi_i^{-1}(x_i), \varphi_i^{-1}(x_i)) \\
&\quad + d(\varphi_i^{-1}(x_i), \psi_i(x_0)) \\
&= d(\varphi_i\psi_i(x_0), x_i) + \delta_{\hat{\psi}_j}(\varphi_i^{-1}(x_i)) + d(x_i, \varphi_i\psi_i(x_0)) \\
&\leqslant d + r_j + d.
\end{aligned}$$

因为 $M^n = \tilde{M}^n/(\varGamma_1 \times \varGamma_2)$ 紧, 所以当 i, k 充分大的时候就有

$$\psi_i^{-1}\hat{\psi}_j\psi_i = \psi_k^{-1}\hat{\psi}_j\psi_k,$$

从而 $\psi_i^{-1}\psi_k$ 和 $\hat{\psi}_j$ 可交换. 回忆一下 $\{\hat{\psi}_1, \cdots, \hat{\psi}_m\}$ 构成 $\varGamma_2$ 的一组生成元, 故 $\varGamma_2$ 有非平凡的中心元, 矛盾. 证毕.

引理 6.16 设 $(M^n, g), \pi_1(M^n) = \varGamma_1 \times \varGamma_2$ 如引理 6.15 所述. 则对所有 $x_0 \in \tilde{M}^n$, $\mathrm{Con}(\varGamma_1\{x_0\})$ 是个完备的全测地的 Riemann 子流形, 且 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 等距同构于 $(\tilde{M}_1, \tilde{g}_1) \times (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$.

证明 令 $\mathcal{F} = \{\Omega | \Omega \subset \mathrm{Con}(\varGamma_1\{x_0\}), \varGamma_1\Omega = \Omega, \Omega \neq \varnothing, \Omega$ 是个 $\varGamma_1$ 不变的凸集$\}$. 由 $\mathrm{Con}((\varGamma_1\{x_0\})/\varGamma_1)$ 的紧性, $\mathcal{F}$ 有一个最小元 N_0. 任取 $x \in N_0$, 由 N_0 的最小性得出 $\mathrm{Con}(\varGamma_1\{x\}) = N_0$.

任取 $y \notin N_0$, 令 $N_y = \mathrm{Con}(\varGamma_1\{y\})$. 我们将证明 $\mathrm{Con}\Big(N_0 \bigcup N_y\Big)$ 等距同构于 $N_0 \times [0, l_y]$, 这里 $l_y = d(y, N_0)$, 从而 N_y 等距于 N_0. 我们的证明可以这样进行：令

$$\Sigma_0 = \{x \in N_0 | d(x, N_y) = d(N_0, N_y)\}.$$

显然因 N_0 和 N_y 是 $\varGamma_1$ 不变集, 所以 Σ_0 也是 $\varGamma_1$ 不变集. 取定一点 $z \in \Sigma_0, \varphi \neq 1 \in \varGamma_1$. 令 $\mathcal{P}_y$：$\tilde{M}^n \to N_y$ 是投影映射, 我们就会有

$$d(z, \mathcal{P}_y(z)) = d(\varphi(z), \mathcal{P}_y(\varphi(z))) = d(N_0, N_y) = l_y,$$

所以由四点 $\{z, \mathcal{P}_y(z), \varphi(z), \mathcal{P}_y(\varphi(z))\}$ 张成四边形具有内角 $\geqslant \dfrac{\pi}{2}$. 故该四边形必定是个全测地的平坦矩形. 显然 Σ_0 是 $\varGamma_1$ 不变的凸集, 由 N_0 的最小性, 必有 $N_0 = \Sigma_0$.

上述讨论得 $\mathrm{Con}\Big(N_0\bigcup N_y\Big)$ 等于 $N_0\times[0,l_y]$. 因此, $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 等距于 $N_0\times Y$. 下面我们要证明 N_0 是个无边流形.

反设 N_0 不是一个无边流形, 取一点 $x\in\partial N_0$ 和 $x_p\in\mathrm{Int}(N_0)$. 令 σ 是从 x_0 出发经过 x 的测地线, 取一点 $y\notin N_0$ 但 $y=\sigma(t_0+\varepsilon)$, 这里 $t_0=d(x_0,x)$. 根据上述构造, N_0 和 N_y 平行, 并且张成一个平坦条纹 $N_0\times[0,l_y]$, 即 $\mathrm{Con}\Big(N_0\bigcup N_y\Big)\cong N_0\times[0,l_y]$. 取 N_y 中的一点 z 对应垂直线 $\{x_0\}\times[0,l]$. 则三点 $\{x_0,z,y\}$ 构成的三角形有在 x_0 和 z 两个顶点处直角, 这和非正曲率三角内和定理矛盾. 因此, $N_0=\mathrm{Con}(\mathit{\Gamma}_1\{x_0\})$ 是无边流形. 证毕.

引理 6.17 设 (M^n,g) 为紧且具有非正曲率的 Riemann 流形, $\pi_1(M^n)=\mathit{\Gamma}_1\times\mathit{\Gamma}_2$. 如果 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 有等距分解 $(\tilde{M}_1,\tilde{g}_1)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$, $\mathit{\Gamma}_1(\tilde{M}_1)=\tilde{M}_1$ 且假设 $\mathit{\Gamma}_2$ 无非平凡的中心, 则

(1) $\mathit{\Gamma}_1$ 在 $\tilde{M}_2$ 因子上的作用是平凡的,

(2) $\mathit{\Gamma}_2$ 在 $\tilde{M}_2$ 因子上的作用是离散的.

证明 (1) 反设 $\mathit{\Gamma}_1$ 在 $\tilde{M}_2$ 上作用非平凡. 因 $\mathit{\Gamma}_1$ 和 $\mathit{\Gamma}_2$ 可交换, 则存在 $\varphi\in\mathit{\Gamma}_1,\varphi\neq1$ 使得 φ 在 $\tilde{M}_2$ 作用非平凡且 $\delta_\varphi|_{\tilde{M}_2}$ 是全局有界的. 因为 δ_φ 凸故必为非零常数. 按照本章以前的讨论, $(\tilde{M}_2,g_2)$ 必存在一个等距分解 $\tilde{M}_2\cong\mathbb{R}^k\times\tilde{M}_2'$, 这里 $k\geqslant1$. 因为 $M^n=\tilde{M}^n/\mathit{\Gamma}$ 紧, 不难证明 $\mathit{\Gamma}_2$ 有个非平凡的中心元, 矛盾. 因此 $\mathit{\Gamma}_1$ 在 $\tilde{M}_2$ 的作用必为平凡.

(2) 令 $\mathcal{P}_i$: $\tilde{M}^n\to\tilde{M}_i$ 为投影映射, ρ_i 为 $\tilde{M}_i^n$ 因子上的作用. 因为 $\mathit{\Gamma}_1$ 在 $\tilde{M}_2$ 上作用平凡, 我们只需证明 $\rho_2(\mathit{\Gamma})$ 在 $\tilde{M}_2$ 因子上作用是离散的. 反设存在 $\beta_n=\rho_2(r_n)$ 使得 $\beta_n\to1$. 由引理 6.15 和引理 6.16 知 $\tilde{M}_1/\mathit{\Gamma}_1$ 紧. 所以可以找到一族 r_n^* 使得 $r_n^*=(\rho_1(r_n^*),\beta_n)$ 且 $[\rho_1(r_n^*)]^{-1}[\rho_1(r_n)]$ 在 $\mathrm{Iso}(\tilde{M}_1)$ 一致有界且固定一点 $x_1\in\tilde{M}_1$. 如有必要, 不妨取一个子列. 我们不妨设 $\xi_n=r_{n+1}^*(r_n^*)^{-1}\to1$, 且 $\xi_n\in\mathrm{Iso}(\tilde{M}_1)\times\{1\}$, 从而 $\beta_{n+1}\beta_n^{-1}\equiv1$ 和 $\beta_n=\hat{\beta}$ 常元素. 但是 $\beta_n\to1$, 所以必有 $\beta_n\equiv1$, 因此, $\mathit{\Gamma}$ 在 $\tilde{M}_2$ 上的作用离散. 证毕.

定理 6.14 是引理 6.15~ 引理 6.17 的直接推论.

§6.4 Eberlein 正规交换子群分解定理

在上节中我们讨论了当基本群无中心时的分解定理. 但是当 (M^n,g) 是紧非正曲率的流形且 $\pi_1(M^n)$ 有非平凡中心时, 我们不禁要问 (M^n,g) 是否等距 $(M_1,g_1)\times(M_2,g_2)$? 这里 (M_1,g_1) 平坦, $\dim(M_i)\geqslant1$.

其实此时度量 g 有时不再是乘积度量. 这样的例子在 Calabi 构造平坦流形时曾讨论, 后来 Lawson-Yau 和 Wolf 都将 Calabi 的想法发扬光大.

6.4.1　Calabi, Lawson-Yau 盘绕乘积

假设 (M_2^{n-k}, g_2^0) 是一个具有非正曲率的 Riemann 流形, 再设存在非平凡的同态 ρ: $\pi_1(M_2^{n-k}) \to \mathbb{R}^k$. 令 $M^n = T^k \times M_2^{n-k}$, 这里 (T^k, g_1^0) 是个平坦 k 维环面, 令 $g^0 = g_1^0 \oplus g_2^0$. 显然 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 有个等距分解 $(\tilde{M}^n, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^k, \tilde{g}_1^0) \times (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2^0)$. M^n 的基本群是 $\mathbb{Z}^k \times \pi_1(M_2^{n-k})$. 现在 $\Gamma = \mathbb{Z}^k \times \pi_1(M_2^{n-k})$ 在 $\tilde{M}^n$ 的作用具有下列性质：

(i) $\mathbb{Z}^k$ 在 $\tilde{M}_2^{n-k}$ 因子上的作用平凡 (请见引理 6.17),

(ii) $\pi_1(M_2^{n-k})$ 在 $\mathbb{R}^k$ 上的作用也是平凡的.

在很多情形下, $\pi_1(M_2^{n-k})$ 在 $\mathbb{R}^k$ 上的作用不一定平凡. 对任何 $(\varphi, \psi) \in \mathbb{Z}^k \times \pi_1(M_2^{n-k})$, 我们考虑一族群表示 ρ_t: $\mathbb{Z}^k \times \pi_1(M_2^{n-k}) \to \mathrm{Iso}(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 如下：

$$\rho_t(\varphi, \psi)(x, q) = (\varphi(x) + t\rho(\psi), \psi(q)),$$

对所有 $(x, q) \in \mathbb{R}^k \times \tilde{M}_2$. 因为 $\rho_t(\Gamma) \subset \mathrm{Iso}(\tilde{M}^n, \tilde{g})$, 所以其商空间 $\tilde{M}^n/\rho_t(\Gamma)$ 仍是具有非正曲率的紧流形, 并且 $M_t^n = \tilde{M}^n/\rho_t(\Gamma)$ 微分同胚于 $\tilde{M}^n/\Gamma$, 但是其商度量 $g^t = \tilde{g}/\rho_t(\Gamma)$ 并不是 $M_t^n = T^k \times M_2^{n-k}$ 上的乘积度量, 这里 $t > 0, \rho$ 是非平凡的同态.

如果 M_2^{n-k} 是个紧的可定向的高亏格的曲面, 令 $H_1(M_2^{n-k}, \mathbb{Z})$ 是 M_2^{n-k} 的一维同调群, 则 $H_1(M_2^{n-k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$, 这里 $k = 2m$, m 是 M_2^{n-k} 的亏格. 代数拓扑的知识告诉我们 $H_1(M_2^{n-k}, \mathbb{Z}) = \pi_1(M_2^{n-k})/[\pi_1(M_2^{n-k}), \pi_2(M_2^{n-k})]$. 如果 G 是个群, $[G, G]$ 表示由 $aba^{-1}b^{-1}$ 生成的子群. 所以存在一个自然同态 η: $\pi_1(M_2^n) \to H_1(M_2^{n-k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$. 任取一个非平凡的同态 $\hat{\rho}$: $\mathbb{Z}^k \to \mathbb{R}^k$, 则 $\rho = \hat{\rho} \circ \eta$. 是 $\pi_1(M^n)$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的非平凡的同态. 请详见 [LY].

6.4.2　Eberlein 分解定理

在上面的讨论中 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的欧氏空间因子起了举足轻重的作用. 我们不禁要问 Cartan-Hadamard 流形 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 的欧氏空间因子 $(\mathbb{R}^k, g_0)$ 究竟和 $\pi_1(M^n)$ 有什么关系?

我们首先看一下 Klein 瓶的例子. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的两个等距变换 A, B: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 这里 $A(x, y) = (x, y+1)$ 和 $B(x, y) = (x+1, 1-y)$. 记由 A 和 B 产生的群为 $\pi = \langle A, B \rangle$. 则 π 的中心为由 B^2 生成的子群 $\langle B^2 \rangle$, 其秩为 1. 此时欧氏平面的维数为 2. 注意到 $B^{-1}AB = A^{-1}$. 所以 $\langle B^2, A \rangle$ 是 π 的正规交换子群, 其秩恰为 2.

从这个例子中受到启发, 我们首先有下列结论.

命题 6.18(Eberlein, 丘成桐) 假设 (M^n, g) 是紧的具有非正曲率的 Riemann 流形, 并且假设 $\mathit{\Gamma}_1$ 为基本群 $\pi_1(M^n)$ 中的最大正规交换子群, 其秩为 $k \geqslant 1$. 则

(1) $\pi_1(M^n)$ 存在一个子群 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 使得 $\mathit{\Gamma}_1$ 为 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心且 $|\pi_1(M^n)/C(\mathit{\Gamma}_1)|$ 有限;

(2) 万有覆盖空间 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 等距分解为两个完备 Riemann 流形的乘积 $(\mathbb{R}^k, g_0) \times (\tilde{M}_2^{n-k}, \tilde{g}_2)$;

(3) 存在 M^n 的一个有限覆盖 $\hat{M}$ 使得 $\hat{M}$ 微分同胚于 $T^k \times \hat{M}_2$, 这里 $C(\mathit{\Gamma}_1) = \pi_1(\hat{M}) = \mathbb{Z}^k \oplus \pi_1(\hat{M}_2)$, 而且 $\pi_1(\hat{M}_2)$ 无中心.

证明 (1) 根据上节的讨论 $\mathit{\Gamma}_1$ 同构于 $\mathbb{Z}^k$, 我们不妨设 $\mathit{\Gamma}_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \rangle$. 因 $\mathit{\Gamma}_1$ 是 $\pi_1(M^n)$ 的正规子群, 对任何 $\varphi \in \pi_1(M^n)$, 我们有相应的 $\mathit{\Gamma}_1$ 的一个自同构:

$$\begin{aligned} Ad_\varphi\text{：}\quad & \mathit{\Gamma}_1 \to \mathit{\Gamma}_1, \\ & \alpha \to \varphi^{-1}\alpha\varphi. \end{aligned}$$

记 $\mathrm{Aut}(\mathit{\Gamma}_1)$ 为 $\mathit{\Gamma}_1 = \mathbb{Z}^k$ 的自同构群. 则因 $\mathit{\Gamma}_1$ 正规, 我们得出相应的同态:

$$\begin{aligned} Ad\text{：}\quad & \pi_1(M^n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^k), \\ & \varphi \to Ad_\varphi. \end{aligned}$$

注意到 $Ad_\varphi = 1$ 当且仅当 $\varphi^{-1}\alpha\varphi = \alpha$ 对所有 $\alpha \in \mathit{\Gamma}_1 = \mathbb{Z}^k$ 成立, 即 φ 和 $\mathit{\Gamma}_1$ 中的任何元可交换. 令

$$C(\mathit{\Gamma}_1) = \ker(Ad) = \left\{ \varphi \in \pi_1(M^n) \mid \varphi\alpha\varphi^{-1} = \alpha \text{ 对所 } \alpha \in \mathit{\Gamma}_1 \text{ 成立} \right\}.$$

显然, $\mathit{\Gamma}_1$ 包含在 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心里. 因为 $C(\mathit{\Gamma}_1) = \ker(Ad)$, 所以 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 是 $\pi_1(M^n)$ 的正规子群.

我们首先证明 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心恰恰是 $\mathit{\Gamma}_1$. 令 H 是 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心. 任取 $h \in H$, $\varphi \in \pi_1(M^n)$, 则有 $\varphi^{-1}h\varphi \in C(\mathit{\Gamma}_1)$(因为 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 是 $\pi_1(M^n)$ 的正规子群). 显然 Ad_φ 将 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心映成中心, 故 $\varphi^{-1}h\varphi \in H$, 从而 H 是 $\pi_1(M^n)$ 的正规交换子群. 因为我们假设 $\mathit{\Gamma}_1 \subset H$ 是最大的交换子群, 故 $H = \mathit{\Gamma}_1$.

下面我们证明 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 在 $\mathit{\Gamma} = \pi_1(M^n)$ 中有有限指数. 令 $\mathbb{E}^k$ 为 $\mathit{\Gamma} = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle = \mathbb{Z}^k$ 张成的欧氏空间, 记 $L = \max\{\|\alpha_i\| \mid i = 1, \cdots, k\}$, 取 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 为 $\mathit{\Gamma}_1$ 中模小于 L 的元素, 即 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\} = B_L(0) \bigcap \mathit{\Gamma}_1$. 则 Ad_φ 保持子集 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 不变. 因此 $Ad(\mathit{\Gamma})$ 是个有限子群, 它的元素的总个数不会超过 $m!$, 从而 $|\mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_1| = |Ad(\mathit{\Gamma})| \leqslant m!$, 即 $|\pi_1(M)/C(\mathit{\Gamma}_1)|$ 是个有限数.

(2) 我们已经证明 $\mathrm{Min}(\mathit{\Gamma}_1)=\mathrm{Min}(\mathbb{Z}^k)=\mathbb{R}^k\times D$ 有个等距分解. 因此, 我们只需证明

$$\mathrm{Min}(\mathit{\Gamma}_1)=\mathrm{Min}(\mathbb{Z}^k)=\tilde{M}^n.$$

任取 $\alpha_i\in\mathit{\Gamma}_1, \varphi\in C(\mathit{\Gamma}_1)$, 我们观察到

$$\delta_{\alpha_i}(\varphi(x))=d(\varphi x,\alpha_i\varphi(x))=d(\varphi x,\varphi\alpha_i(x))=\delta_{\alpha_i}(x),$$

故 $\mathrm{Min}(\alpha_i)$ 在 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 作用下不变. 取定 $x_0\in\mathrm{Min}(\alpha_i)$. 因为 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 在 $\mathit{\Gamma}=\pi_1(M)$ 中有有限指数, 所以 $\tilde{M}^n/C(\mathit{\Gamma}_1)$ 为 M^n 的有限覆盖从而紧. 因此 $C(\mathit{\Gamma}_1)\{x_0\}$ 的凸包必为整个 $\tilde{M}^n$, 故我们得出 $\tilde{M}^n=C(\mathit{\Gamma}_1)\{x_0\}$ 的凸包 $\subset C(\mathit{\Gamma}_1)\mathrm{Min}(\alpha_i)\subset\mathrm{Min}(\alpha_i)$, 即 $\mathrm{Min}(\alpha_i)=\tilde{M}_n$ 对所有 $\alpha_i\in\mathit{\Gamma}_1$ 成立, 从而 $\mathrm{Min}(\mathit{\Gamma}_1)=\mathrm{Min}(\mathbb{Z}^k)=\tilde{M}_n$ 和 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})=(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$.

(3) 因为 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 具有非正曲率, 根据丘成桐定理, $C(\mathit{\Gamma}_1)/\mathit{\Gamma}_1$ 不再有非平凡的中心元 (这里我们用到了 $\mathit{\Gamma}_1$ 是 $C(\mathit{\Gamma}_1)$ 的中心的事实).

现在我们应用引理 6.17 的证明可以推出 $\mathit{\Gamma}_1$ 在 $\mathbb{R}^k\times\tilde{M}_2$ 中 $\tilde{M}_2$ 因子上作用平凡. 这里我们令 $\tilde{M}_1=\mathbb{R}^k$, $\rho_i\colon\tilde{M}\to\tilde{M}_i$ 为投影映射. 显然因为 $\mathit{\Gamma}_1$ 是 $\mathit{\Gamma}=\pi_1(M^n)$ 的正规子群, 所有 $\varphi\in\mathit{\Gamma}$(或 $\varphi\in C(\mathit{\Gamma}_1)$) 保持 $\tilde{M}^n=\mathbb{R}^k\times\tilde{M}_2$ 的等距分解, 从而存在同态 $\rho_i\colon\mathit{\Gamma}\to\mathrm{Iso}(M_i)$. 所有 $\varphi\in C(\mathit{\Gamma}_1)$ 都可以写成 $\varphi=(\rho_1(\varphi),\rho_2(\varphi))$. 由引理 6.17 的证明可以得出 $\rho_2(\mathit{\Gamma}_1)$ 是个平凡群, $\rho_2(\mathit{\Gamma})$(或者 $\rho_2(C(\mathit{\Gamma}_1))$) 在 $\tilde{M}_2$ 上的作用是离散. 因为 $\mathit{\Gamma}$ 在 $\tilde{M}$ 上作用有紧商空间, 故 $\tilde{M}_2/C(\mathit{\Gamma}_1)$ 是紧流形. 令 $\hat{M}_2=\tilde{M}_2/C(\mathit{\Gamma}_1)$, 则 $\tilde{M}^n/C(\mathit{\Gamma}_1)=\hat{M}^n$ 同胚于 $T^k\times\hat{M}_2$.　证毕.

反过来, 我们要从等距度量分解 $(\tilde{M},\tilde{g})=(\mathbb{R}^k,\tilde{g}_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 导出 $\pi_1(M^n)$ 有个正规的交换子群 $\mathbb{Z}^k$.

定理 6.19(Eberlein 分解定理)　设 (M^n,g) 是个紧的 Riemann 流形且具有非正曲率, $\tilde{M}^n$ 是 M^n 的万有覆盖, $\tilde{g}$ 是 g 的提升度量. 则 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 的 deRham 度量分解 $(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 有欧氏空间因子 $\mathbb{R}^k(k\geqslant 1)$ 当且仅当 $\pi_1(M^n)$ 有个正规的交换子群 $\mathit{\Gamma}_1$ 同构于 $\mathbb{Z}^k$.

证明　当 $\pi_1(M^n)$ 有个正规的交换子群 $\mathit{\Gamma}_1$ 同构于 $\mathbb{Z}^k$ 时, 根据命题 6.18 得出 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 必有度量分解 $(\tilde{M}^n,\tilde{g}_0)=(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_0)$, 而且存在 M 的一个正规有限覆盖 $\hat{M}$ 同胚于 $T^k\times\hat{M}_2$.

反过来, 如果 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 的 deRham 度量分解 $(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 有欧氏空间因子 $\mathbb{R}^k$ $(k\geqslant 1)$, 我们要证明 M^n 有一个有限覆盖 $\hat{M}$ 微分同胚于 $T^k\times\hat{M}_2$. 令 $\pi\colon\tilde{M}=\mathbb{R}^k\times\tilde{M}_2\to M^n$ 为万有覆盖空间. 证明的主要困难在于我们事先不知道 $\pi(\mathbb{R}^k\times\{y\})$ 是否是 M^n 中的闭子流形.

我们举个例子说明这个问题的复杂性. 令 $(M^2,g)=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=S^1(1)\times S^1(1)$ 为一个乘积环面, 它的各个因子都为 2π. 如果我们选个 $\mathbb{R}^2$ 的奇怪的无理化的度量分解　$\mathbb{R}^2=\{\mathbb{R}v_1\}\times\{\mathbb{R}v_2\}$, 这里 v_1 和 v_2 是一对正交向量, 它们的斜度 $\dfrac{a_i}{b_i}$ 是无理数, $v_i=(a_i,b_i)$, 则每条线 $\pi(\{\mathbb{R}v_i\}\times\{z\})$ 的投影在正环面 (T^2,g_0) 中不是闭子集.

从上面的例子说明我们需要用到 deRham 度量分解的性质, 这里 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})=(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 中的 $(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 因子不再有欧氏空间的因子. 我们的证明分三步, 其中第一步是构造 M^n 的有限覆盖 $\hat{M}$ 使 $\hat{M}$ 拥有 k 个线性无关的全局平行向量场.

第一步. 有限覆盖 $\hat{M}^n$ 的构造.

因为 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})=(\mathbb{R}^k,g_0)\times(\tilde{M}_2,\tilde{g}_2)$ 是 deRham 分解, 所以任何 $(\tilde{M}^n,\tilde{g})$ 的等距映射 $\varphi\colon\tilde{M}^n\to\tilde{M}^n$ 把欧氏因子映成欧氏因子, 把非欧氏因子映射非欧氏因子. 于是任何 $\varphi\in\mathit{\Gamma}=\pi_1(M^n)$ 都可以分解成 $\varphi=(\alpha(\varphi),\beta(\varphi))$, 这里 $\alpha(\varphi)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的等距变换, $\beta(\varphi)$ 为 $(\tilde{M}_2^{n-k},\tilde{g}_2)$ 的等距.

我们要指出的是, 尽管 $\mathbb{R}^2$ 有两个线性独立全局平行向量场, 但是 Klein 瓶上没有两个线性独立的全局平行向量场. 所以, 我们不能断定 (M^n,g) 会有 k 个线性独立的全局平行向量场.

$\hat{M}^n$ 的构造和命题 6.18(1) 的证明类似. 令 $A=\mathbb{R}^k$ 为 $\mathbb{R}^k$ 所有平移构成的等距子群. 任取 $\varphi\in\mathit{\Gamma}$, 我们令

$$\begin{aligned}\hat{A}d_\varphi\colon\ & A\to A,\\ & \psi\to[\alpha(\varphi)]^{-1}\cdot\psi\cdot[\alpha(\varphi)].\end{aligned}$$

取定 A 的一组正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$, $L=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\|\alpha_k\|$. $A'=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_k\rangle=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\alpha_2\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_k$. 则 $\hat{A}d(\mathit{\Gamma})$ 把 A 中球中 B_L 映射 B_L, 从而 $\hat{A}d(\mathit{\Gamma})$ 是个有界集. 令 $C_{\mathit{\Gamma}}(A)=\ker(\hat{A}d)\bigcap\mathit{\Gamma}$, 则 $\mathit{\Gamma}/C_{\mathit{\Gamma}}(A)\subset\hat{A}d(\mathit{\Gamma})$ 是个有界集, 从而是个有限集. 因此 $C_{\mathit{\Gamma}}(A)$ 是 $\mathit{\Gamma}$ 中有有限指数的正规子群. 令 $\hat{M}=\tilde{M}^n/C_{\mathit{\Gamma}}(A)$, 则 $\hat{M}$ 是 M^n 的有限正规覆盖.

第二步. 紧 Riemann 流形 $(\hat{M}^n,\hat{g})$ 的等距变换构成的李群.

如果 $\hat{\varphi}$ 是 $(\hat{M}^n,\hat{g})$ 上的一个等距变换, 则 $\hat{\varphi}$ 将 $\hat{M}^n$ 中的测地线映射成测地线. 固定 $\hat{M}^n$ 中任何一点 x_0, $\hat{\varphi}$ 由它在 x_0 处的导数 $\hat{\varphi}_*|_{x_0}$ 唯一决定, 所以如果 x_0 是 $\hat{\varphi}$ 的一个不动点, 则 $\hat{\varphi}_*|_{x_0}\colon T_{x_0}\hat{M}^n\to T_{x_0}\hat{M}^n$ 是个正交变换, 令 $G=\{\hat{\varphi}\mid\hat{\varphi}\colon\hat{M}\to\hat{M}^n$是等距$\}$ 和 $H=\{\hat{\varphi}\in G\mid\hat{\varphi}(x_0)=x_0\}$, 则我们有纤维丛

$$H\to G\to\hat{M}^n,$$

这里 $H \subset O(n)$ 是正交的子群. 于是 H 是个紧子群, 因此 $G = \mathrm{Iso}(\hat{M}^n, \hat{g})$ 是个紧李群.

下面我们计算 G 的李代数. 注意到由第一步子群 $C_\Gamma(A)$ 和 $\mathbb{R}^k$ 因子的平移群 A 可换, 从而 $(\hat{M}^n, \hat{g}) = (\tilde{M}^n, \tilde{g})/C_\Gamma(A)$ 容许 k 个线性独立的全局平行向量场, 记成 $\{v_1, \cdots, v_k\}$. 我们要证明向量场 v_i 产生的单参数子群 $\{\hat{\varphi}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是个 $(\tilde{M}^n, \hat{g})$ 上的等距子群. 这可以从 $\{\hat{\varphi}_i(t)\}$ 在 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 的提升 $\tilde{\varphi}_i(t)$ 看出. 它的提升由向量场 v_i 的提升 $\tilde{v}_i$ 得到, 从而是 $(\tilde{M}^n, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^k, g_0) \times (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$ 中关于 $\mathbb{R}^k$ 因子的平移, 所以 $\{\tilde{\varphi}_i(t)\} \subset A$ 是等距的, 从而 G 的李代数包含一个子李代数 A. 因为 G 是紧李群, 由李代数理论, G 必包含一个 k 维环面子群 T^k. 再因为 T^k 的李代数 A 构成 k 维平行向量空间, 所以对任何 $x_0 \in \hat{M}$, T^k 的在 x_0 的轨道是个全测地的子流形, 从而包含同态：$\pi_1(T^k) \hookrightarrow \pi_1(\hat{M}^n)$ 是单一的, $\pi_1(\hat{M}^n)$ 包含一个子群 $\mathbb{Z}^k$. 因为 T^k 的轨道的提升是 $(\tilde{M}^n, \hat{g})$ 中的 $\mathbb{R}^k$ 因子, 所以 $\mathbb{Z}^k$ 是平移群. $\mathbb{Z}^k \subset A$, 从而是 $C_\Gamma(A)$ 的中心. 因为 $C_\Gamma(A)$ 是 Γ 的正规子群, 所以 $\mathbb{Z}^k$ 是 Γ 的正规子群.　证毕.

§6.5　Gromov 图形流形和最小体积流形

在 20 世纪 80 年代初, Gromov 引进了一个新的几何不变量, 叫做 “极小体积” (Minimal Volume).

定义 6.20　假设 M^n 是一个 n 维可微光滑流形. 则 M^n 的最小体积可定义为

$$\mathrm{MinVol}(M^n) = \inf \left\{ \mathrm{Vol}_n(M^n, g) \,\middle|\, |K_g| \leqslant 1,\ (M^n, g) \text{ 是一个完备的 Riemann 流形} \right\}.$$

换句话说, 流形 M^n 的最小体积为所有具有有界截面曲率 $|K_g| \leqslant 1$ 的 Riemann 体积的下界.

我们首先举例说明这个 “最小体积” 几何量为什么有用.

例　在 2 维情况, 我们考虑所有 2 维紧曲面. 假设 Σ_k^2 是一个光滑的、可定向的具有亏格为 k 的紧曲面. 再假设 g 是 Σ_k^2 上的一个 Riemann 度量并具有截面曲率 $|K_g| \leqslant 1$. 根据经典的 Gauss-Bonnet 定理, 我们观察到下面的不等式成立

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}\left(\Sigma_k^2,\ g\right) &\geqslant \int_{\Sigma_k^2} |K_g| dA \\ &\geqslant \left| \int_{\Sigma_k^2} K_g dA \right| = |2\pi(2-2k)|,\end{aligned}$$

从而

$$\operatorname{MinArea}\left(\Sigma_k^2\right)=|2\pi(2-2k)|.$$

因此, 当 Σ_k^2 是个 2 维球面 S^2 时, 我们有亏格 $k=0$. 从而, 我们有

$$\operatorname{MinArea}(S^2)=4\pi.$$

更进一步, S^2 上的最优度量为常曲率度量.

对高维流形, 我们首先观察到下面的有趣现象. 假设 M^n 是个乘积流形, 即 $M^n=\Sigma^{n-k}\times T^k$. 再假设其中一个乘积因子是环面因子. 对于任何维环面 $T^k=S^1\times\cdots\times S^1=\mathbb{R}^k/(\varepsilon\mathbb{Z})^k$, 我们可以证明 T^k 的最小体积为零. 同样地, $\operatorname{MinVol}\left(\Sigma^{n-k}\times T^k\right)=0$.

我们可以将上述现象作如下推广. 假设有一个纤维丛 $T^k\to M^n\to\Sigma^{n-k}$, 其中每个纤维都同胚于 k 维环面. 在这种情况下, 我们也可以证明, M^n 的最小体积为零. 我们还观察到如果 $T^k\to M^n\to\Sigma^{n-k}$ 是个纤维丛, 则由纤维诱导的基本群 $\mathbb{Z}^k\cong\pi_1(T^k)$ 是 $\pi_1(M^n)$ 的一个正规子群 (有时, 可以包含在 $\pi_1(M^n)$ 的中心).

对上述的纤维流形 M^n, 如果 M^n 容许一个具有非正截曲率的度量 g, 则根据 Eberlein-Yau 定理, M^n 必为一个相同维数的乘积流形 $\hat{M}^n=\Sigma^{n-k}\times T^k$. 显然, 此时我们有 $\operatorname{MinVol}(M^n)=0$.

当 $n=3$ 时, Gromov 将上述构造进一步地加以推广, 引进所谓的图形流形. 对这类图形流形, 我们作如下描述. 其实, 如果我们假设 $M^3=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{m}V_\alpha$ 是一个 3 维光滑流形. 并分成 m 块 $\{V_1,\cdots,V_m\}$. 再假设每一块 V_α 是一个带边的 3 维乘积流 $V_\alpha=\Sigma_\alpha^2\times S^1$, 其中 Σ_α^2 是个带边的 2 维流形. 当 Σ_α^2 是个带边亏格为负的 2 维曲面时, 我们可以在 Σ_α^2 上选取一个乘积度量靠近 Σ_α^2 的边界, $\partial\Sigma_\alpha^2\times[0,\varepsilon]=S^1\times[0,\varepsilon]$. 在 Σ_α^2 的内部, 我们要求度量 g 具有非正曲率.

为简单起见, 我们假设 M^3 分成两个部分, 即 $m=2$, $M^3=\left(\Sigma_1^2\times S^1\right)\bigcup\left(S^1\times\Sigma_2^2\right)$, 并且假设 Σ_1^2 和 Σ_2^2 都同胚于一个带洞的 2 维环面 $[T^2-D^2]=\Sigma_1^2=\Sigma_2^2$, 见图 24.

与众不同的是, 当把两部分 $V_1=\Sigma_1^2\times S^1$ 和 $V_2=S^1\times\Sigma_2^2$ 粘起来时, 我们人为地 (故意地) 交换 S^1 因子, 使得 $M^3=\left[\Sigma^2\times S^1\right]\bigcup\limits_f\left[S^1\times\Sigma^2\right]$ 不是一个全局的乘积流形. 这里

$$f:\quad \left(\partial\Sigma^2\right)\times S^1\to S^1\times\left(\partial\Sigma^2\right),$$

$$(t,\ s)\to(s,\ t)$$

是个自同构且满足 $f \circ f = Id$.

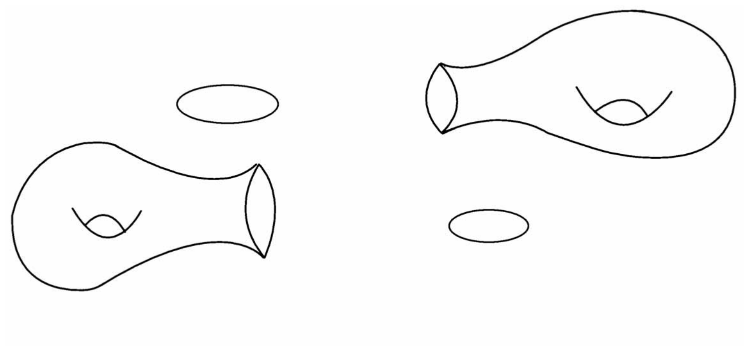


图 24

从上述的例子, 我们看到图形流形是乘积流形和纤维丛的推广. 下面我们给出图形流形的简单定义.

定义 6.21 假设 (M^n, g) 是个紧的具有非正曲率的 Riemann 流形, 并假设 $M^n = \bigcup_{k=1}^{m} U_k$ 有个特殊的分解满足下列性质:

(1) 每个 U_k 具有一个正规有限覆盖 $V_k \to U_k$ 使得 V_k 是个乘积流形, 即 $V_k = T^{\alpha_k} \times \Sigma^{n-\alpha_k}$, 这里 T^{α_k} 是个 α_k 维的环面和 $\alpha_k \geqslant 1$.

(2) 如果两个开集 U_j 和 U_k 的相交集是个非空开集, 则 V_j 和 V_k 的环面因子 T^{α_j} 和 T^{α_k} 张成一个可交换子群 $T^{\beta_{j,k}}$, 这里 $T^{\beta_{j,k}}$ 是个环面并且是 $V_j \bigcap V_k$ 的一个环面因子.

如果上述条件满足, 则称 M^n 为一个广义图形流形.

关于 3 维具有非正曲率的图形流形 M^3, 俄国数学家 Buyalo 和德国数学家 Schroeder 都作过很好的工作, 见 [Bu 1], [Bu 2] 和 [Sc].

我们如果对上述 Gromov 的 3 维图形进行一个仔细的验算, 就会发现他们的最小体积为零, 即 $\mathrm{MinVol}(M^3) = 0$ 对所有的 3 维图形流形 M^3 都成立.

反过来, 我们不禁要问: 如果 $\mathrm{MinVol}(M^n) = 0$ 并且假设 M^n 容许一个具有非正截面曲率的度量, 那么 M^n 是不是一个广义图形流形呢?

对这个问题. 本书的第一作者、Cheeger 和戎小春得到下列初步结果.

定理 6.22(曹建国、Cheeger 及戎小春) 假设 (M^n, g) 是个紧无边, 具有非正曲率 $-1 \leqslant K_{M^n} \leqslant 0$ 的 Riemann 流形. 则存在一个只与维数有关的常数 ε_n, 使得当 $\mathrm{Vol}(M^n, g) \leqslant \varepsilon_n$ 时, M^n 必是一个广义图形, 从而 $\mathrm{MinVol}(M^n) = 0$.

定理 6.22 是文章 [CCR1] 的一个推论. 它的证明较长, 故不在这里陈述. 有兴

趣的读者可参见 [CCR1].

§6.6 测地流的刚性定理和其他刚性定理简介

在本节中, 我们讨论几个流形的刚性问题. 根据定理 6.1, 所有带非正截面曲率的流形 M^n 都被欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 覆盖. 从而这类流形 M^n 的高维同伦群为零. 由此我们得出下面的推论.

引理 6.23 假设 (M_1^n, g_1) 和 (M_2^n, g_2) 为两个具有非正曲率的完备 Riemann 流形, 且具有相同的基本群, 则 M_1^n 和 M_2^n 同伦等价.

著名数学家 A.Borel 提出了下面的问题：如果两个紧的无边流形 M_1 和 M_2 都有相同的基本群, 并且假设他们的高维同伦群都为零, 则这两个流形 M_1 和 M_2 会不会相互同胚?

这方面, Farrell 和 Jones 作了杰出的工作, 这就是我们所要讨论的所谓的拓扑刚性问题.

定理 6.24 (Farrell-Jones[FJ1~2]) 假设 (M_1^n, g_1) 和 (M_2^n, g_2) 是两个紧无边的具有非正曲率的流形,M_1^n 和 M_2^n 具有相同的基本群且维数 $n \geqslant 6$, 则 M_1^n 和 M_2^n 同胚, 但不一定微分同胚.

在文章 [FJ2] 中, Farrell 和 Jones 具体构造两个具有负曲率的紧无边流形 M_1^n 和 M_2^n , 使得这两个流形同胚, 但不是微分同胚. 其中 M_1^n 是具有常截面负曲率的流形, 即 M_1^n 是实常曲率的双曲空间的商空间.

我们要指出的是, 当 $n=3,4$ 时, 定理 6.24 还不知道是否成立. 当 $n=3$ 时,3 维闭流形上的微分结构是唯一的. 著名的 Poincaré 猜想是：如果 M^3 同伦于 3 维球则 M^3 同胚于 3 维球.4 维的光滑 Poincaré猜测是 “如果 M^4 同胚于 4 维单位球面, 则 M^4 微分同胚于 4 维单位球面” . 所以定理 6.24 的证明是非常艰深的.

众所周知, 闭流形上的陈省身示性类和 Pontryajin 示性数是微分同胚不变量. 所谓 Novikov 猜测就是考虑陈类是不是同伦不变量或拓扑不变量.

类似地, 人们不禁要问 $\mathrm{MinVol}(M^n)$ 是不是同胚或同伦不变量. 这个问题可分两种情况考虑. 我们首先考虑当 $\mathrm{MinVol}(M^n) \neq 0$ 时的情况, 这和 Besson-Courtois-Gallot 中的几何刚性定理有关.

定理 6.25([BCG]) 假设 (M^n, g) 是个负曲率闭流形且同伦等价于一个实双曲率 $\mathbb{H}^n$ 的紧商空间, 即 $M^n \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$, 再假设 $\mathrm{MinVol}(M^n) = \mathrm{MinVol}(\mathbb{H}^n/\Gamma)$. 则 (M^n, g) 等距同构 $\mathbb{H}^n/\Gamma$(最多相差一个常数因子). 特别地,M^n 微分同胚于 $\mathbb{H}^n/\Gamma$.

Gromov-Thurston 已经指出 $\mathrm{MinVol}(\mathbb{H}^n/\varGamma) = \mathrm{vol}(\mathbb{H}^n/\varGamma, g_{-1})$, 这里 g_{-1} 是具有常负曲率 $K \equiv -1$ 的 Riemann 度量.

把定理 6.25 和定理 6.24 结合起来, 人们不难看出有一个高维 $(n \geqslant 6)$ 流形 M^n 同伦于 $\mathbb{H}^n/\varGamma$, 但是 $\mathrm{MinVol}(M^n) > \mathrm{MinVol}(\mathbb{H}^n/\varGamma)$.

但是当 $\mathrm{MinVol}(M^n) = 0$ 时, 特别是当 M^n 是个广义图形流形时, $\mathrm{MinVol}(M^n) = 0$ 似乎是个同伦不变性质. 以下是本书第一作者, Cheeger 和戒小春的最新结果 (见参考文献 [CGR2])).

定理 6.26(曹建国、Cheeger 及戒小春) 假设 M_1^n 是广义图形流形且每个局部环面因子的维数 $\geqslant n-2$, M_2^n 是个紧无边流形, 容许一个非正曲率的 Riemann 度量 g_2 且同伦等价于 M_1^n, 则 M_2^n 必为一个广义图形流形, 进而有 $\mathrm{MinVol}(M_2^n) = 0$.

如果把同伦等价 $M_1^n \sim M_2^n$ 换成存在一个非零度数的映照 F: $M_1^n \to M_2^n$, 则定理 6.26 的结论照样成立.

关于局部对称空间 $\mathbb{H}^n/\varGamma$ 等的几何刚性问题, 是 1950~2000 这 50 年间的重要课题.Mostow,Gromov,Ballmann,Berger,Pansu, Burns-Spatzier, Katok, Eberlein,Besson-Courtois-Gallot,Corllett,Mok-Siu-Yeung,Jost- 丘成桐等都作了杰出的工作, 读者可以在其他书籍和文献中了解到.

这里我们要讨论的是当两个流形 M_1^n 和 M_2^n 都不是局部对称空间时的刚性问题. 相信这样的刚性问题 (诸如定理 6.24 和定理 6.26) 将吸引更多数学家的注意, 可能会成为 21 世纪几何拓扑研究的重要课题. 我们在此作个简短阐述.

1950 年左右,M.Kac 提了这样一个著名的问题：能否从鼓声的声谱来确定一个铜鼓的形状?(即 Can you hear the shape of drum?)

一个 (带边或无边的)Riemann 紧流形 (M^n, g) 的谱就是它的 Laplace 算子的谱. 这里我们考虑一个更强的几何谱.

定义 6.27(长度谱) 假设 (M^n, g) 是紧无边的具有非正截面曲率的流形, 定义长度谱函数为

$$\begin{aligned} l_{(M^n,g)}\colon \pi_1(M^n) &\to \mathbb{R}, \\ \sigma &\to l_{(M^n,g)}(\sigma), \end{aligned}$$

这里 $l_{(M^n,g)}(\sigma) = \inf\{L_g(\psi) | \psi$ 是自由同伦于 σ 的闭曲线$\}$, $L_g(\psi)$ 是闭曲线 ψ: $S^1 \to M^n$ 的长度 $L_g(\psi) = \displaystyle\int_{S^1} \left\| \frac{d\psi}{ds} \right\|_g d_s$.

Riemann 几何中的一个重要定理说：如果 (M^n, g) 是个具有负截面曲率的紧无边 Riemann 流形, 对几乎所有 g, 它的长度谱决定 (M^n, g) 的 Laplace 谱.

与 M.Kac 谱问题相关的谱刚性问题是

问题 6.28 (长度谱刚性问题) 假设 (M_1^n, g_1) 和 (M_2^n, g_2) 为两个紧无边具有非正截曲率的流形, 且具有相同的基本群和相同的长度流 (或共轭的测地流), 问这两个流形是否等距?

当 $n = 2$ 时, 这个问题由 Croke-Otal 解决. 当 $n = 3$ 时, 对图形流形 Croke 有下述结果.

定理 6.29 (Croke) 假设 (M_1^3, g_1) 和 (M_2^3, g_2) 是具有非正截面曲率的紧无边的 3 维图形流形, 且具有共轭的测地流, 则它们相互等距同构.

总的来说, 问题 6.28 在 $n \geqslant 3$ 时有待更深入的研究.

习 题 六

(含未解决的问题)

1 (非光滑曲面的曲率). 假设 Σ_k^2 是个亏格为 k 的紧无边可定向曲面, 取一个 Σ_k^2 的三角剖分 τ. 我们考虑由这个三角剖分产生的非光滑平坦度量. 对 τ 中的每个三角形, 我们赋予它们平坦度量 g_τ, 这样的度量在三角剖分 τ 的每个顶点处可能不光滑. 任取 τ 的一个顶点 v, 我们考虑以 v 为顶点的所有三角形内角和, 记为 $a_\tau(v)$. 这样的内角和 $a_\tau(v)$ 不一定是 2π, 我们定义非光滑度量 g_τ 在 v 处的曲率为

$$K_\tau(v) = a_\tau(v) - 2\pi.$$

试证明下列广义 Gauss 公式：

$$K_\tau(v_1) + \cdots + K_\tau(v_m) = 2\pi(1-k),$$

这里 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 为 (Σ_k^2, τ) 的顶点集合, k 为曲面 Σ_k^2 的亏格.(提示：在每个顶点 v_j 处挖掉一个半径为 ε 的小圆盘, 并应用经典 Gauss-Bonnet 公式.)

2 (欧氏平面的等周不等式). (i) (Wirtinger 不等式). 假设 f：$[0,l] \to \mathbb{R}$ 是实函数满足 $\int_0^l f(s)ds = 0$ 和 $f(0) = f(l)$, 试证明

$$\int_0^l [f'(s)]^2 \mathrm{d}s \geqslant \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \int_0^l [f(s)]^2 \mathrm{d}s.$$

(提示：用 Fourier 展式.)

(ii) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是个紧且以 $\partial\Omega$ 为边界的光滑区域. 再假设 $\sigma = \partial\Omega$ 是条长度为 l 的闭曲线

$$\sigma：[0,l] \to \partial\Omega,$$
$$s \to (x(s), y(s)).$$

σ 是单位弧长参数表示, 即 $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 \equiv 1$. 当 $\partial\Omega = \sigma$ 的重心为原点时, 试证明

$$\begin{aligned} 2\text{Area}(\Omega) &= \int_\Omega [xdy - ydx] \leqslant \frac{l}{2\pi} \int_0^l \{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2\} ds \\ &= \frac{l^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

(iii) 用 (i) 和 (ii) 的结果推出

$$A(\Omega) \leqslant \frac{[l(\partial\Omega)]^2}{4\pi}$$

对所有 $\mathbb{R}^2$ 中的有界域 Ω 成立.

3 (未解决的问题：Gromov 猜测). 假设 (M^n, g) 是个单连通的具有非正截面曲率的完备 Riemann 流形. 考虑下列等周不等式是否成立

$$\mathrm{Vol}_n(\Omega) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}_n(B^n(1))}{[\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(1))]^{\frac{n}{n-1}}}[\mathrm{Vol}_{n-1}(\Omega)]^{\frac{n}{n-1}},$$

这里 $S^{n-1}(1) = \partial B^n(1)$, $B^n(1)$ 是欧氏空间的单位实心球, 且 $n \geqslant 4$ ($n = 3$ 时由 B.Kleiner 解决).

4 (未解决的问题：丘成桐的一个猜测). 我们已知道：如果 (M^n, g) 是个紧无边的具有非正曲率的 Riemann 流形, 且假设 M^n 基本群 $\pi_1(M^n)$ 有个同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 的子群, 则 (M^n, g) 包含全测地浸入平坦环面. 现在我们反过来要问：

假设 (M^n, g) 是个紧无边具有非正截面曲率的 Riemann 流形, (M^n, g) 的万有覆盖空间 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 包含一个全测地的欧氏子平面. 此时 M^n 的基本群 $\pi_1(M^n)$ 是否包含一个同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 的子群?

5 (从含 $\mathbb{Z}$- 子群到含 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 子群). 假设 (M^n, g) 是个紧无边具有非正截面曲率的 Riemann 流形, 设 (M^n, g) 的万有覆盖空间 $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ 包含一个 $\hat{\mathbb{Z}}$ 不变的全测地欧氏平面 $\mathbb{R}^2$, 这里 $\hat{\mathbb{Z}}$ 是基本群 $\pi_1(M^n)$ 的一个子群. 试证明 $\pi_1(M^n)$ 含一个同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 子群.(提示：考虑等距浸入

$$\psi\text{：}\quad \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = S^1 \times \mathbb{R} \to M^n,$$

$$(s,t) \to \psi(s,t).$$

因为 (M^n, g) 是个紧 Riemann 流形, 它的测地线是循环的, 从而存在两个非常大的数 t_1 和 t_2 使得

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t_1) - \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t_2)\right\|_{SM^n} < \varepsilon < \mathrm{Inj}(M^n, g),$$

这里 $\|\cdot\|_{SM^n}$ 表示单位切丛的距离函数,$|t_1 - t_2|$ 非常大. 用上述不等式和 $\psi|_{S^1\times[t_1,t_2]}$ 构造一个连续映射 φ：$S^1 \times S^1 \to M^n$ 使得 $\varphi_*(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \subset \pi_1(M^n)$.)

第七章　具有非负曲率的流形

关于正曲率流形的研究在整体 Riemann 几何中起着重要的作用. 在本章我们从讨论具有非负曲率的例子着手, 考虑关于正曲率紧流形基本群的陈省身猜测. 在 20 世纪 70 年代中, Cheeger-Gromoll 作出了关于非紧完备、具有非负曲率流形的开创性工作, 本章也作些简介. 由该理论所产生的各种猜测和未解决问题仍然是几何学家的热门课题. 本章也将给出一个 Cheeger-Gromoll 灵魂猜测的新证明.

§7.1　具有非负曲率流形的例子

在几何中, 构造正面的例子和反例是个重要课题. 著名数学家 Calabi 曾专门开设一门研究生课程叫做“几何中的例子和反例”. 新的例子为开创新的几何提供启示，并且是几何理论的基石. 本节先考虑齐性空间的例子, 接着再讨论非局部对称空间的例子.

我们先考虑紧李群上的双不变度量. 如果 G 是个紧李群, 对 G 中的每一个元 σ, 我们考虑 σ 在 G 上的左作用和右作用. 例如, 左作用 $\mathcal{L}_\sigma$：$G \to G$ 可以定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma\text{：}\quad & G \to G,\\ & h \to \sigma h.\end{aligned}$$

类似地, 我们可以定义右作用 $\mathcal{R}_\sigma$：$G \to G$ 为 $\mathcal{R}_\sigma(h) = h\sigma$. 用 $(\mathcal{L}_\sigma)_*$ 表示 $\mathcal{L}_\sigma$ 的导数映射, 则对 G 上的任何一个度量 g, 我们可以构造一个新的度量使得新度量 $\hat{g}$ 是紧李群 G 上的双不变度量.

构造新度量 $\hat{g}$ 的过程为如下. 首先取一个在李群 G 上的双不变 Harr 测度 μ 使得 G 的总测度为 1, 即 $\mu(G) = 1$. 对在单位元 e 处的任何一对切向量 X 和 Y, 我们定义

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle_{\hat{g}}|_e = \int_G \int_G \langle (L_\sigma)_*(R_{\sigma'})_* X, (L_\sigma)_*(R_{\sigma'})_* Y\rangle d_\mu\sigma d_\mu\sigma',$$

这里 $d_\mu(\sigma)$ 表示对变量 σ 用测度 μ 积分. 类似地, 在 $T_\sigma(G)$ 中的新度量可定义为

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle_{\hat{g}}|_\sigma = \int_{h\in G} \int_{\sigma'\in G} \langle (L_h)_*(R_{\sigma'})_* X, (L_h)_*(R_{\sigma'})_* Y\rangle d_\mu(h) d_\mu(\sigma').$$

显然新度量 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 是双不变的.

如果 $\{X, Y\}$ 是 G 上的两个左不变向量场, 则我们可以算出

$$\hat{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \tag{7.1}$$

这里 $\hat{\nabla}$ 表示关于新度量 $\hat{g}$ 的协变导数. 关于等式 (7.1) 可以验证如下.

首先我们回忆一下李群中的基本等式. 考虑 G 的内自同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_h\colon\ & G \to G, \\ & z \to h^{-1} z h. \end{aligned} \tag{7.2}$$

注意到李群 G 在单位元 e 处的切空间恰恰是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$, 对等式 (7.2) 中 z 求导, 我们有

$$\begin{aligned} Ad_h\colon\ & T_e(G) \to T_e(G), \\ & X \to d(\mathrm{Aut}_h)|_e X. \end{aligned} \tag{7.3}$$

如果 G 有个双不变的度量, 则 $Ad_h\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是个等距同构. 假设 X, Y 和 Z 为 G 上的三个左不变向量场并且令 $h = \exp(tZ)$, 我们更进一步得到, 对所有 t 都有

$$\langle Ad_{\exp(tZ)} X, Ad_{\exp(tZ)} Y \rangle = \langle X, Y \rangle. \tag{7.4}$$

众所周知,

$$\frac{d}{dt}(Ad_{\exp(tZ)} X)|_{t=0} = [Z, X]. \tag{7.5}$$

对 (7.4) 关于 t 在 $t = 0$ 处求导并应用 (7.5) , 我们得出

$$\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0 \tag{7.6}$$

对所有左不变向量场成立, 这里度量 $\langle , \rangle$ 是双不变的. 最后由 Gallot, Hulin 和 Lafontaine 书的第 68 页得出 (并应用 (7.6))

$$\begin{aligned} 2\langle \hat{\nabla}_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \\ &= 0 + 0 - 0 + \langle [X, Y], Z \rangle - 0 \\ &= \langle [X, Y], Z \rangle \end{aligned} \tag{7.7}$$

对所有左不变向量场成立.

命题 7.1 假设李群 G 具有双不变的度量. 则对 G 上的任何三个左不变向量场 X, Y 和 Z, 都有

$$\hat{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

且它的曲率张量为

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{4}[[X,Y],Z], \tag{7.8}$$

从而截面曲率为非负,

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle=\frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2.$$

证明 李括号乘积的定义为 $[X,Y]f=XYf-YXf$ 对所有光滑函数 f 成立. 因此我们可从定义直接得出 Bianchi 等式

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0. \tag{7.9}$$

根据等式 (7.9) 和 (7.1). 我们看出

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= -\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= -\frac{1}{4}[X,[Y,Z]]+\frac{1}{4}[Y,[X,Z]]+\frac{1}{2}[[X,Y],Z]\\
&= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]+\frac{1}{2}[[X,Y],Z]\\
&= \frac{1}{4}[[X,Y],Z].
\end{aligned}$$

再应用 (7.6) 我们有

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)X,Y\rangle &= \frac{1}{4}\langle[[X,Y],X],Y\rangle\\
&= -\frac{1}{4}\langle[X,[X,Y]],Y\rangle\\
&= \frac{1}{4}\langle[X,Y],[X,Y]\rangle.
\end{aligned}$$

证毕.

根据命题 7.1 可以得出, 任何一个具有双不变度量的李群可分解为 $G=G_1\times\mathbb{R}^k$, 其中 G_1 为紧不可交换的李子群.

接下去我们要说明的是：如果 G 是一个具有双不变度量的李群, 则它的商空间 G/H 必是一个具有非负截面曲率的流形, 这里 H 是 G 的一个子群. 通常商空间 G/H 称为齐性空间.

齐性空间的截面曲率的计算主要依赖于著名的 O'Neill 公式. O'Neill 首先注意到恰当序列

$$H\to G\to G/H$$

和由此引起的纤维丛. 拓扑中的纤维丛和 Riemann 几何中的 Riemann 浸没 (Riemannian submersion) 有着紧密的联系.

定义 7.2 (Riemann 浸没)　假设 (M^n, g) 和 (N^k, h) 为两个完备的 Riemann 流形, 并假设存在一个 C^1 光滑映射 ψ: $M^n \to N^k$ 满足如下性质:

(1) 映射 ψ 是个正则满射 (即 C^1 光滑浸没): $\psi(M^n) = N^k$, 在 M^n 中的每一点 x, ψ 的导数 $\psi_*|_x$ 是个满秩矩阵;

(2) 对 N^k 中每一点 $q \in N^k$, 有一个 C^1 光滑的满秩纤维 $\psi^{-1}(q) = F_q$. 如果 X 在 p 处垂直于 F_q, 则我们要求

$$\|\psi_*|_p X\|_h = \|X\|_g$$

对所有 $X \perp F_q$ 成立.
这样的映射 ψ 叫做 Riemann 浸没.

假设 ψ: $M^n \to N^k$ 是个 C^2 光滑 Riemann 浸没, 则对 N^k 上的任何一个向量场 $\xi \in TN^k$, $p \in M^n$, 都存在 ξ 在 p 处的唯一提升 $\tilde{\xi}$ 使得 $\tilde{\xi} \perp F_q = \psi^{-1}(q)$, 这里 $q = \psi(p)$, $\|\tilde{\xi}\| = \|\xi\|$ 和 $\psi_*|_p \tilde{\xi} = \xi$. 我们观察到, M^n 在 p 处的切空间 T_pM^n 有个正交分解

$$T_pM^n = H_p \oplus T_pF_q, \tag{7.10}$$

这里 H_p 是纤维 F_q 在 p 处的正交补, 简称 N^k 在 p 处的水平提升.

下面的O'Neill定理对 Riemann 浸没的研究十分重要.

定理 7.3　假设 ψ: $M^n \to N^k$ 是个 C^2 光滑 Riemann 浸没, 则对 N^k 中在 q 处任何两个单位正交向量场 ξ, η 我们都有

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}} \tilde{\eta} = \widetilde{(\nabla_\xi \eta)} + \frac{1}{2}[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]^v, \tag{7.11}$$

这里 Y^v 是由 (7.10) 中正交分解 $Y = Y^h \bigoplus Y^v$ 中的相切于纤维 F_q 的分量. 更进一步, 我们还有

$$K_{M^n}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) + \frac{3}{4}\|[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]^v\|^2 = K_{N^k}(\xi, \eta), \tag{7.12}$$

这里 K_{M^n} 和 K_{N^k} 表示截面曲率.

证明　我们首先观察到如果 f: $N^k \to \mathbb{R}$ 是个光滑函数, 则有

$$[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}](f \circ \psi) - \widetilde{[\xi, \eta]}(f \circ \psi) = 0. \tag{7.13}$$

如果 V 相切于 F_q, 则有

$$[\tilde{\xi}, V](f \circ \psi) = 0. \tag{7.14}$$

回忆一下我们以前用过的公式

$$
\begin{aligned}
2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
& +\langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle,
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

从 (7.13)~(7.15) 可以得出

$$
\begin{cases}
\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}, \tilde{Z}\rangle = \langle\nabla_\xi \eta, Z\rangle, \\
\langle\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}, V\rangle = \dfrac{1}{2}\langle[\tilde{X},\tilde{Y}], V\rangle, \\
\langle\nabla_V \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle = -\langle[\tilde{X},\tilde{Y}], V\rangle.
\end{cases} \tag{7.16}
$$

上述等式表示当 X 和 Y 是正交单位向量时, 则有

$$
K_{N^k}(X,Y) = K_{M^n}(\tilde{X},\tilde{Y}) + \frac{3}{4}\|[\tilde{X},\tilde{Y}]^v\|^2.
$$

由此, 定理 7.3 成立. 证毕.

Riemann 几何中一个极为重要的问题是研究是否有具有正曲率的怪球, 读者可参见丘成桐的几何问题集的第二个问题 ([Y2] p670).

在 1956 年,Milnor 发现很多流形同胚于单位球面可是并不微分同胚于单位球面. 例如存在 7 维怪球 Σ^7, 它不是任何 8 维有边流形的边界. 我们注意到 7 维标准球面是 8 维实心球体的边界, 故 Σ^7 肯定不微分同胚于 S^7, 见 [Mi]. 在 7 维时, 恰恰有 28 种流形同胚于 S^7, 其中 15 种怪球是由不同的纤维丛引起

$$
S^3 \to \Sigma^7_j \to S^4.
$$

最近 Grove 和 Ziller[GZ] 证明了这 15 种 Milnor 怪球都容许一个非负曲率的度量. 我们要指出的是, 有个 9 维怪球没有具有正数量曲率的度量, 见 Hitchin 的工作 (见 [Hi]).

非齐性空间的例子应当归功于 Cheeger.1973 年他构造了在 $\mathbb{C}P^n\#\mathbb{C}P^n$ 上具有非负截面曲率的度量 (见 [Che1]). 从那以后,30 年来没有新的具有非负曲率的非齐性空间的例子发现.

另一方面, Gromov 证明了存在一个常数 $C(n)$, 只和维数 n 有关，使得任何一个具有非负截面曲率的 n 维流形 M^n 都有

$$
\sum_{j=0}^{n} b_j(M^n) \leqslant C(n),
$$

这里 b_j 是 M^n 的第 j 个 Betti 数, 见 [Gr1]. 所以 Cheeger 的方法不能应用到任意大的拓扑和 $\underbrace{\mathbb{C}P^n\#\mathbb{C}P^n\#\cdots\#\mathbb{C}P^n}_{k\text{次}}$ 上.

§7.2 基本群和陈省身猜测的反例

在 1965 年, 现代微分几何的奠基人陈省身提出了下列猜想：假设 M^n 是个紧的具有正截面曲率的 Riemann 流形, 则它的基本群 $\pi_1(M^n)$ 的任何交换子群必为循环子群 (见 [Y2] p671).

陈省身猜测是受到 Preissmann 定理的启发. 在 §6.2 节中我们阐述了 Preissmann 定理：假设 M^n 是紧的可定向的具有负截面曲率的流形，则 M^n 的基本群 $\pi_1(M^n)$ 的任何一个交换子群必和整数群 $\mathbb{Z}$ 同构.

可惜，K、Shankar 在 1998 年找到了一个简单的反例 (见 [Sh]). 我们首先注意到正交群 $SO(3)$ 具有一个子群同构于 $\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2$, 这里 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 显然 $\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2$ 是个非循环群. 所以, 如要说明陈省身猜想不成立, 只需验证下列定理.

定理 7.4 ([Sh]) 存在一个 7 维的具有正截面曲率的流形 M^7，使得正交群 $SO(3)$ 在 M^7 上有一个自由的保度量的作用. 从而 $M^7/(\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2)=N^7$ 是个具有正截面曲率的 Riemann 流形,N^7 的基本群有个同构于 $\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2$ 的子群.

证明 令 $U(3)$ 是 3 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^3$ 的复正交群. 如果 A 是个 3×3 复矩阵, 我们用 $\bar{A}$ 表示 A 的共轭,A^T 表示 A 的转置. 则

$$U(3)=\{A|A\bar{A}^T=Id\},$$

这里 Id 表示恒等矩阵.$\dim_{\mathbb{R}}(U(3))=9$.

令 $Z'=\left\{\begin{pmatrix} z & 0 & 0\\ 0 & z & 0\\ 0 & 0 & \overline{z}\end{pmatrix}\middle||z|=1\right\}$ 等距同构单位圆周群，再令

$$U_{1,1}=\left\{\begin{pmatrix} z & 0 & 0\\ 0 & z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle||z|=1\right\}.$$

因为子群 $U(2)\times Z'$ 作用在 $U(3)$ 上是个保度量的自由作用, 我们且有 $U_{1,1}\subset U(2)$. 下面我们考虑双边商空间 $U_{1,1}/U(3)/Z'$, 即考虑所有双边集 (cosets) $\{U_{1,1}vZ'\}_{v\in U(3)}$,

所得商空间为 M^7, 并且我们有下列纤维丛

$$(U(2)\times Z')/(U_{1,1}\times Z')\to M^7\to \mathbb{C}P^2.$$

大家都知道, $SO(3)=SU(2)=(U(2)\times Z')/(U_{1,1}\times Z')$, 从而 $SO(3)$ 在 M^7 上的作用是等距的和自由的, 上述纤维丛等价于

$$SO(3)\to M^7\to \mathbb{C}P^2$$

是个 Riemann 浸没. Eschenburg 已经证明 M^7 上 (从 $U(3)$ 上诱导出) 的商度量具有正截面曲率 ([Es2]). 证毕.

我们要指出的是, 如果一个完备流形 M^n 的 Ricci 曲率有个正的下界, $\mathrm{Ric}_{M^n}\geqslant (n-1)c^2>0$, 则 M^n 的直径小于等于 $\dfrac{\pi}{c}$, 参见本节的前半部. 如果 M^n 的截面曲率为正, 则 M^n 不一定是紧的. 例如抛物面 $M^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2=z\}$ 的截面曲率处处为正, 但它的曲率没有一个全局的正的下确界.

在下一节中, 我们讨论具有非负截面曲率的非紧流形. 在非紧流形和非负曲率的研究中, Cheeger-Gromoll 作了开创性的工作.

§7.3 Cheeger-Gromoll 理论和开流形

本节的主要目的是讨论非紧完备的具有非负曲率的流形. Cheeger-Gromoll 对这类流形的几何和拓扑结构作了深刻的描述, 其中最主要的是发现这类流形必定微分同胚于一个紧的全测地的子流形的法向量丛.

定义 7.5 (全凸集, totally convex set) 设 Ω 是完备流形 M^n 中的一个子集. 假设任何端点落在 Ω 中的测地线段 σ: $[0,1]\to M^n$ 都全部落在 Ω 中, 即 $\sigma([0,1])\subset\Omega$, 则称 Ω 为 M^n 中的一个全凸集.

在定义 7.5 中, 我们并没有要求测地线段 σ 是最短测地线段. 显然地, 全凸集必是一个凸集. 反过来, 凸集不一定是全凸集.

例 取 M^n 为标准球面 $S^2(1)$. 令 Ω 为一个单点集 $\Omega=\{p_0\}$, 这里 p_0 是 2 维单位球面的南极. 显然 Ω 是个凸集. 但是如果我们取经过南极的闭测地线 σ, 则 σ 并不包含在 Ω 中, 所以 Ω 不是一个全凸集.

如果 Ω 是 M^n 中的全凸集, 取 $f(x)=d(x,\Omega)$. 应有 Morse 理论可以证明, M^n 同伦等价于 Ω. 所以 Ω 包含 M^n 的很多拓扑信息.

如果 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的流形, 我们希望找出一个紧无边的并且是全凸的子流形 S. 这样的无边子流形叫做 M^n 的灵魂 (soul).

我们要分几步走才能最后构造出流形 M^n 的灵魂 S. 首先我们试图找出带边的全凸子集，这要牵连到定义在 M^n 上的 Busemann 函数.

定义 7.6　(1) 假设 σ：$[0,+\infty) \to M^n$ 是条测地线且满足 $d(\sigma(t_1),\sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$, 这里 $t_i(i=1,2)$ 为任何非负实数，则称 σ 为一条 (极小) 射线 (ray).

(2) 如果 σ：$[0,+\infty) \to M^n$ 为一条极小射线, 则函数

$$\eta_\sigma(x) = \lim_{t\to+\infty}\{t - d(x,\sigma(t))\}$$

称为由 σ 决定的 Busemann 函数.

我们从下面的例子中可以看到不是所有的测地线都是极小射线.

例　我们考虑柱面 $M^2 = S^1 \times \mathbb{R} = \{(\cos t, \sin t, z)|t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. 显然 M^2 的曲率恒为零. 因为 M^2 上有乘积度量, 其中的 S^1 因子是全测地的, 所以 $S^1 \times \{z_0\}$ 是条在 M^2 中的闭测地线. 任何闭测地线肯定不是极小射线. 我们再考虑螺旋线 $\sigma(t) = (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \beta t)$, 这里 $\alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha\beta > 0$. 因为螺旋线在 S^1 和 $\mathbb{R}$ 上的投影均为测地线，所以螺旋线 σ 必是柱面 $M^2 = S^1 \times \mathbb{R}$ 中的测地线. 当 $\alpha \neq 0$ 时，这样的测地线 σ 不是极小射线. 只有径向直线 $\sigma(t) = (x_0, y_0, t)$ 是 $M^2 = S^1 \times \mathbb{R}$ 中的极小射线.

下面的引理在 Cheeger-Gromoll 理论中起了举足轻重的作用.

命题 7.7　假设 M^n 是非紧完备且具有非负截面曲率的流形, 假设 σ：$[a,+\infty] \to M^n$ 是条极小射线, 则相应的 Busemann 函数 η_σ：$M^n \to \mathbb{R}$ 是个凸函数. 更进一步 $\eta_\sigma^{-1}((-\infty, c])$ 是个全凸集.

证明　假设 φ：$[a,b] \to M^n$ 是条具单位速度的测地线，并设 φ 的两个端点均落在 $\eta_\sigma^{-1}([-\infty, c])$ 中. 我们要证明：对所有 $\hat{s} \in [a,b]$, $\eta_\sigma(\varphi(\hat{s})) \leqslant c$. 令

$$\delta_t(\hat{s}) = d(\sigma(t), \varphi(\hat{s})).$$

我们的目标是证明

$$\lim_{t\to\infty}[t - \delta_t(\hat{s})] \leqslant c.$$

为了实现这个目标，我们考虑(a,b)中的开集 $U = \{s|\ \eta_\sigma(\varphi(s)) > c\}$. 如果 U 是空集, 则命题 7.7 自然成立. 若不然，取 U 中包含 $\hat{s} \in U$ 的最大区间 (s_1, s_2) 使得 $\hat{s} \in (s_1, s_2) \subset U$, 显然 $\eta_\sigma(\varphi(s_1)) = c = \eta_\sigma(\varphi(s_2))$(由最大性质得出). 假设 ψ_t 是连 $\varphi(\hat{s})$ 和 $\sigma(t)$ 的长度为 δ_t 的测地线，令

$$\alpha_t = \measuredangle_{\varphi(\hat{s})}(\sigma(t), \varphi(s_1)), \beta_t = \measuredangle_{\varphi(\hat{s})}(\sigma(t), \varphi(s_2)).$$

因为 $\alpha_t+\beta_t=\pi$, 所以至少 α_t 和 β_t 中有一个小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$. 因为截面曲率为非负, 由比较定理得出 $d(\sigma(t),\varphi(s_1))$ 和 $d(\sigma(t),\varphi(s_2))$ 中至少有一个满足 $\leqslant\sqrt{\delta_t^2+(s_1-s_2)^2}$, 即有

$$\min\{d(\sigma(t),\varphi(s_1)),d(\sigma(t),\varphi(s_2))\}\leqslant\sqrt{\delta_t^2+(s_1-s_2)^2}.$$

这等价于

$$\delta_t\geqslant\min\{\sqrt{[d(\sigma(t),\varphi(s_1))]^2-(s_1-s_2)^2},\sqrt{[d(\sigma(t),\varphi(s_2))]^2-(s_1-s_2)^2}\}.$$

当 $t\to\infty$, 取极限我们就得出

$$\begin{aligned}\eta_\sigma(\varphi(\hat{s}))&=\lim_{t\to\infty}[t-\delta_t(\hat{s})]\\&\leqslant\max\{\eta_\sigma(\varphi(s_1)),\eta_\sigma(\varphi(s_2))\}=c.\end{aligned}$$

由此命题成立. 证毕.

为了构造紧的全凸集. 我们需要下面的引理.

引理 7.8 假设 M^n 是个非紧完备的 Riemann 流形, $\{q_0,q_1,\cdots\}$ 是个无界的无穷序列. 再假设 σ_j: $[0,l_j]\to M^n$ 是连 q_0 到 q_j 的一条最短测地线且具有单位速度. 则有一个子序列 $\{\sigma'_{j_i}(0)\}_{i=1}^{+\infty}$ 收敛于一个单位向量 $v_\infty\in T_{q_0}(M^n)$ 使得 $\sigma_\infty(t)=\mathrm{Exp}_{q_0}(tv_\infty)$ 且 σ_∞: $[0,+\infty)\to M^n$ 是一条从 q_0 出发的射线.

证明 我们首先观察到在 q_0 处的单位切球面 $S_{q_0}^{n-1}(1)\subset T_{q_0}(M^n)$ 是个紧集. 所以无穷序列 $\{\sigma'_j(0)\}$. 有一个收敛子序列 $\{\sigma'_{j_i}(0)\}$. 另外注意到 $\{q_j\}$ 是个无界序列, 所以 $d(q_0,q_j)=l_j\to+\infty$. 固定任何 $r_0>0,\sigma_{j_i}|_{[0,r_0]}\to\sigma_\infty|_{[0,r_0]}$ 一致收敛. 因为每个 $\sigma_{j_i}|_{[0,r_0]}$ 都是最短测地线段, 所以对任何一个 $r_0>0,\sigma_\infty|_{[0,r_0]}$ 都是一条最短测地线, 从而 σ_∞: $[0,+\infty)\to M^n$ 是条从 q_0 出发的射线. 证毕.

由上述讨论我们得出下列结论.

定理 7.9 假设 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的流形, $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}$ 是所有从 q_0 出发的极小射线的集合. 则 $\Omega=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\eta_{\sigma_\lambda}^{-1}((-\infty,0])$ 是个包含 q_0 的紧的全凸集. 这里 η_{σ_λ} 是关于 σ_λ 的 Busemann 函数 $\eta_{\sigma_\lambda}(x)=\lim\limits_{t\to\infty}[t-d(x,\sigma_\lambda(t))]$.

证明 由命题 7.7 得出, 半空间 $\eta_{\sigma_\lambda}^{-1}((-\infty,0])$ 是个全凸集. 显然 $q_0\in\eta_{\sigma_\lambda}^{-1}(\{0\})$. 我们断定 $\Omega=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\eta_{\sigma_\lambda}^{-1}((-\infty,0])$ 必是一个有界集. 否则, Ω 中必有一个无界序列 $q_j\to\infty$, 应用引理 7.8, 我们找到一条极小射线 $\hat{\sigma}_\infty$, 使得 $\eta_{\hat{\sigma}_\infty}(q_j)\to+\infty$, 这和 Ω 的定义不相符合, 矛盾. 因此,Ω 必是个有界集. 显然 Ω 是闭集的交集, 仍然为闭集. 由于 M^n 是完备流形, 任何有界闭集必为一个紧集. 所有全凸集的交集仍然是个全凸集. 从而 Ω 是个紧全凸集. 证毕.

根据微分拓扑的知识, 任何凸集是个带边子流形. 假设 Ω 是个凸集且它的维数为 k, 则 Ω 有个 k 维的内部, 且有一个 $(k-1)$ 维的相对边界, Cheeger 和 Gromoll 更进一步考虑内向等距集合：

$$\Omega_{(-t)} = \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) \geqslant t\}.$$

定理 7.10 假设 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的完备流形, 再假设 Ω 是个紧的全凸集, 其相对边界为 $\partial\Omega$. 则 $\Omega_{(-t)} = \{x \in \Omega |\ d(x, \partial\Omega) \geqslant t\}$ 必然是紧全凸子集.

我们用一个新的方法证明定理 7.10, 这个方法受到 Calabi 的工作的影响和启发.

定义 7.11 假设 f：$M^n \to \mathbb{R}$ 是个连续函数, 我们说 f 在 q_0 点处 X 方向的二阶导数

$$\mathrm{Hess}(f)|_{q_0}(X, X) \geqslant C,$$

即意味着有一个包含 q_0 的开集和一个光滑的函数 h：$U \to \mathbb{R}$ 使得

1) $h(q_0) = f(q_0)$;

2) 在 U 上 $f(x) \geqslant h(x)$;

3) $\mathrm{Hess}(h)|_{q_0}(X, X) \geqslant C$, 这里二阶导数 Hessian, Hess$(h)$ 的定义为 $\mathrm{Hess}(h)(X, Y) = XYh - (\nabla_X Y)h = \langle \nabla_X \nabla h, Y\rangle$.

我们需要回忆一下 Riccati 方程. 如果 $\{\Sigma_t\}$ 是一族光滑等距曲面, 假设 $\mathrm{II}_t(X, Y) = \left\langle \nabla_X \dfrac{\partial}{\partial t}, Y \right\rangle$ 是曲面 Σ_t 相对于单位方向 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的第二基本形式. 则这一族第二基本形式 $\{\mathrm{II}_t\}$ 满足 Riccati 方程

$$\mathrm{II}_t' + \mathrm{II}_t^2 + R(t) = 0,$$

这里 $R(t) = R_{(t)}$ 是曲率算子, $R_t(X, Y) = \left\langle R\left(\dfrac{\partial}{\partial t}, Z\right)\dfrac{\partial}{\partial t}, Y\right\rangle$.

注意到如 $\Sigma_t = \partial\Omega_{(-t)}$ 且如果 $\partial\Omega_{(0)}$ 是凸集, 相对于内法向量 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\mathrm{II}_t(X, X) \leqslant 0$. 当截面曲率 $R_t \geqslant 0$ 为非负时，我们则有

$$\mathrm{II}_t' = -\mathrm{II}_t^2 - R_t \leqslant 0.$$

众所周知，当 t 增长时，II_t 变得越来越负. 一个集合 $\Omega_{(-t)}$ 关于内法向量的第二基本形式为负当且仅当 $\Omega_{(-t)}$ 是个凸集.

上述论述对光滑等距曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 是肯定成立的. 对照我们的情形, 我们的等距曲面族 $\{\partial\Omega_{(-t)}\}$ 不一定光滑, 这就需要我们应用定义 7.11 来克服这个困难. 下面我们给出定理 7.10 的详细证明.

定理 7.10 的证明 任取 $q_0 \in \Omega$ 且设 $t_0 = d(q_0, \partial\Omega) > 0$, 令 $f(q) = d(q, \partial\Omega)$. 注意到 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 仅仅是个连续函数, 取一条从 $\partial\Omega$ 到 q_0 一条最短测地线段 $\sigma_0\colon [0, t_0] \to \Omega$ 使得 $\sigma_0(0) \in \partial\Omega$ 和 $\sigma_0(t_0) = q_0$.

如果 Ω 是 k 维带边流形, $\partial\Omega_{(-t)}$ 是 $(k-1)$ 维流形. 因为 $\sigma_0\colon [0, t_0] \to \Omega$ 是条最短测地线段, $\sigma_0|_{[0,\varepsilon]}$ 和 $\sigma|_{[\varepsilon,t_0]}$ 必仍然是最短测地线段. 所以由第一变分公式得出, $\partial\Omega_{(-\varepsilon)}$ 在 $\sigma_0(\varepsilon)$ 处有一个切空间等距于 k 维欧氏空间 $\mathbb{R}^k$, 并且有 $\sigma_0'(\varepsilon) \perp T_{\sigma_0(\varepsilon)}(\partial\Omega_{(-\varepsilon)})$ 即 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 正交于 $\partial\Omega_{(-\varepsilon)}$ 对所有 $0 \leqslant \varepsilon < t_0$ 成立.

令 $\Sigma_t = \partial\Omega_{-t}$. 应用 Riccati 方程, 沿着 σ_0, 我们得出: $\partial\Omega_{(-\varepsilon)}$ 的第二基本形式 (相对内法向量 $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$) 仍然为非正. 故 $\Omega_{(-\varepsilon)}$ 在 $\sigma(\varepsilon)$ 处是凸的. 取 $\varepsilon \to t_0$ 我们得出 $\Omega_{(-t_0)}$ 在 q_0 也是凸的. 证毕.

对每一个给定的紧全凸集 Ω, 我们定义

$$r_{\max}(\Omega) = \max\{d(x, \partial\Omega) | x \in \Omega\}.$$

当 $\hat{t} = r_{\max}(\Omega)$ 时, 令 $\Omega_{(-\hat{t})} = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geqslant \hat{t}\}$, 则 $\dim(\Omega_{(-\hat{t})}) < \dim(\Omega)$.

如果我们重复上述步骤, 每次维数都会递减, 至少每次减少 1 维. 如果 M^n 的维数为 n 维, 最多重复 n 次, 我们最后得到一个全凸集 Ω_0, 且 Ω_0 是个无边的紧流形. 很显然, 全凸集必然是全测地集. 这样的紧无边全凸子流形被 Cheeger 和 Gromoll 称为灵魂.

我们由此总结一下本章的主要结果.

定义 7.12 假设 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的 Riemann 流形, 则存在一个全凸的紧无边流形 S(简称灵魂), 使得 M^n 微分同胚于 S 在 M^n 中的法向量场 NS. 更进一步的, 如果 X 和 Y 是两个 M^n 中沿 S 的单位切向量, 满足 $X \perp S$ 和 $Y \in TS$, 则

$$K(X, Y) \equiv 0,$$

这里 $K(X, Y)$ 表示由 X 和 Y 张成的截面曲率.

证明 我们要用到下面一个事实. 如果 Ω 是个欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的紧凸集, 且 $U_\varepsilon(\Omega)$ 是沿着 Ω 的管状邻域, 则 $\partial[U_\varepsilon(\Omega)]$ 必是一个 $C^{1,1}$ 光滑的紧超曲面, 这是由 Federer 发现的著名定理 (见 [Fe]). 我们要说明的是, 这里我们仅仅假设 Ω 是凸的和 $\varepsilon > 0$, 并没有要求 $\partial\Omega$ 是 C^1 光滑.

当把 $\mathbb{R}^n$ 换成 M^n 时，如果 Ω 仍为紧凸集和 ε 充分小, $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \partial[U_\varepsilon(\Omega)]$ 同样是 $C^{1,1}$ 光滑, 因此我们只需证明：对所有 $R > 0$, 子集 $N_R(S) = \{(x,v)|x \in S, v\perp S, \|v\| \leqslant R\}$ 微分同胚于子集 $U_\varepsilon(\Omega_{R-\varepsilon})$, 这里 $\{\Omega_u\}$ 是由 Cheeger 和 Gromoll 构造的凸集族.

当 R 充分小时 (如 R 小于 S 的单一半径), 众所周知, 指数映照 Exp_s：$N_R(S) \to M^n$ 是个嵌入. 接下去我们用 Bootstrap 方法逐步构造越来越大的微分同胚.

如果 A 是个闭全凸集, 我们令 A 的单一半径为 $\delta(A) = \sup\{\varepsilon \mid U_\varepsilon(A)$ 中每一个点 x 有个唯一个在 A 中的最近点 $\}$, 即如果 $0 \leqslant \varepsilon < \delta(A)$, 则存在一个从 $U_\varepsilon(A)$ 到 A 的最短距离投影.

记 $K_0 = \max\{K(x) \mid x \in U_1(\Omega_R)\}$. 则对任何全凸闭子集 $A \subset \bar{\Omega}_R$, 我们都有

$$\delta(A) \geqslant \delta_0(R) = \frac{1}{4}\min\left\{\mathrm{Inj}_{M^n}(\Omega_R), \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, 1\right\},$$

这里 $\delta_0(R)$ 不依赖于全凸闭子集 A 的选取. 这个不等式是关于测地三角形内角和比较定理的一个推论.

有了上述不等式和最短距离的投影. 我们可以构造一个从 $[N_R(S) - N_{R-\varepsilon}(S)]$ 到 $\left[U_\varepsilon(\Omega_{R-\varepsilon}) - \dfrac{U_\varepsilon}{2}(\Omega_{R-\varepsilon})\right]$ 的微分同胚. 用归纳法. 假设我们已经构造了从 $N_{R_1}(S)$ 到 $U_\varepsilon(\Omega_{R_1-\varepsilon})$ 的微分同胚, 用上述结果我们可以逐步构造从 $[N_{R_2}(S) - N_{R_1}(S)]$ 到 $[U_\varepsilon(\Omega_{R_2-\varepsilon}) - U_\varepsilon(\Omega_{R_1-\varepsilon})]$ 的微分同构. 再作微小的扰动, 我们将两个同胚粘起来, 从而构造 $N_{R_2}(S)$ 到 $U_\varepsilon(\Omega_{R_2-\varepsilon})$ 的同胚, 这里 $R_2 > R_1 + 1$. 从而, 我们得到一个全局的微分同胚

$$F\colon N(S) \to M^n.$$

关于混合截面曲率为零的证明, 我们留到下节去做. 证毕.

§7.4 Cheeger-Gromoll 灵魂猜想的证明

我们首先考虑具有正曲率开流形的例子. 其实 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中任何一个严格凸的开超曲面都是具有正截面曲率的开流形. 特别地, $M^2 = \{(x,y,z)|z = x^2 + y^2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面, 它具有正曲率.

用 Gauss 映照不难证明, 如果 M^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的严格凸的超曲面, 则 M^n 同胚于半球面中的一个星形开集, 从而 M^n 必同胚于 $\mathbb{R}^n$.

更进一步地, Gromoll 和 Meyer 证明了, 如果 M^n 是个非紧完备的且具有正截面曲率的流形, 则 M^n 必同胚于 $\mathbb{R}^n$.

从上述一系列例子出发,Cheeger 和 Gromoll 提出了著名的"灵魂猜想". 我们首先观察到：假设 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的流形, 如果 M^n 的灵魂仅仅是个单点集, 则 M^n 同胚于 $\mathbb{R}^n$.

猜想 7.13 (Cheeger-Gromoll 灵魂猜想)　假设 M^n 是非紧完备的具有非负截面曲率的流形, 如果在 M^n 中有一点 p_0 处所有的截面曲率均为正, 则 M^n 必微分同胚于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

这个猜想在 1972 年提出. 近 30 年来, 由 Marenich,Walschap 和 Strake 等给出了一些零星的部分解, 最后由 Perelman 解决. Perelman 的证明方法, 依赖早期的 Sharafudinov 和林镇焕的工作 (见 [Shv] 和 [Yim2]). 在这里我们提供一个新证明, 不需要额外的关于凸函数和凸集的早期结果. 这个新证明由作者之一的曹建国和萧美琪在 2003 年给出, 见 [CaS2],

如果我们有一个全测地等距浸入

$$\phi\colon \mathbb{R}\times[0,l]\to M^n,$$

$$(s,t)\to\phi(s,t),$$

则我们称 $\phi(\mathbb{R}\times[0,l])$ 为 M^n 中的一条浸入平坦带.

本节的主要目的是要考虑和 Cheeger-Gromoll 凸集族相关的平坦带.

定义 7.14 (相容的平坦带)　假设 $\{\Omega_u\}$ 是 Cheeger 和 Gromoll 构造的全凸集族. 如果每条水平测地线 $\phi(\mathbb{R}\times\{t\})$ 都包含在某个全凸集 Ω 的边界 $\partial\Omega_{u(t)}$, 我们称平坦带 $\phi(\mathbb{R}\times[0,l])$ 相容于 Cheeger-Gromoll 全凸集族 $\{\Omega_u\}$.

本节的主要目的是用一个新方法导出一个新的分段光滑平坦带定理.

定理 7.15 ([CaS1])　假设 M^n 是个非紧完备的具有非负截面曲率的流形, 再假设 M^n 不和 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚, 则对 M^n 中的任何一点 x, 都存在一个连续的分段光滑的平坦带 $\varPhi=\{\phi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 连接 M^n 的灵魂和 x. 更进一步, 每个分段的平坦带 ϕ_i 都和 Cheeger–Gromoll 的凸集族相容. 从而 Cheeger–Gromoll 灵魂猜想成立.

用 Guijarro 和 Perelman 的方法, 曹建国和萧美琪导出定理 7.15 的另外一个证明 (见 [CaS2]). 实际上, 定理 7.15 给出的分段光滑的平坦带 $\{\phi_i\}$ 由 Cheeger-Gromoll 的凸集族唯一决定. 为了刻画这一性质, 我们分三步证明定理 7.15. 在以下的三个小分节中我不仅给出定理的证明, 而且更重要的是对 Cheeger-Gromoll 凸集族的几何性质作个新的更深刻的描述.

7.4.1 Cheeger-Gromoll 分段光滑测地线段

我们首先简单地小结一下 Cheeger-Gromoll 全凸集族的几何特征.

命题 7.16 (Cheeger-Gromoll 全凸集族) 假设 M^n 是个非紧完备且具有非负截曲率的流形, 则存在一个分解 $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < a_{m+1} = \infty$ 和一个全凸集族 $\{\Omega_u\}_{u\geqslant 0}$ 使得下列式子成立：

(1) $M^n = \bigcup\limits_{u\geqslant 0} \Omega_u$. 当 $u > a_m$ 时, $\dim(\Omega_u) = n$; 当 $u \leqslant a_m$ 时, 则 $\dim(\Omega_u) < n$.

(2) $\Omega_0 = S$ 是流形 M^n 的灵魂. 因此 S 是个全测地的无穷光滑无边子流形.

(3) 当 $u > 0$ 时, Ω_u 是个紧的全凸带边子流形. 如 $\dim[\Omega_u] = k_u$, 则它的相对边界 $\partial\Omega_u$ 是一个 $(k_u - 1)$ 维连续流形.

(4) 对任何一个 $u_0 \in [a_j, a_{j+1}]$ 和 $0 \leqslant r \leqslant u_0 - a_j$, 子族 $\{\partial\Omega_{u-r}\}_{r\in[0,u_0-a_j]}$ 构成单向等距子族,

$$\Omega_{u_0-r} = \{x \in \Omega_{u_0} | d(x, \partial\Omega_{u_0}) \geqslant r\}.$$

(5) 如果 $u > a_m$, 则 $u - a_m = \max\{d(x, \partial\Omega_u) | x \in \Omega_u\}$. 当 $0 \leqslant j \leqslant m-1$ 时, 则 $a_{j+1} - a_j = \max\{d(x, \partial\Omega_{a_{j+1}}) | x \in \Omega_{a_{j+1}}\}$, 从而 $\dim(\Omega_{a_j}) < \dim(\Omega_{a_{j+1}})$.

下面我们要考虑最短距离投影的存在性. 如果 Ω 是 M^n 中的一个子集, 我们令 $U_\varepsilon(\Omega) = \{x \in M^n, d(x, \Omega) < \varepsilon\}$ 为围绕 Ω 的管状邻域. 紧子集 Ω 的割迹半径定义为

$$\delta_\Omega = \sup\{\varepsilon |\ \text{存在一个从}\ U_\varepsilon(\Omega)\ \text{到}\ \Omega\ \text{的最短距离投影}\}.$$

当 $\Omega = \{p_0\}$ 为一个单点集时,$\delta_{\{p_0\}} = \mathrm{Inj}_{M^n}(p_0)$ 等于 M^n 在 p_0 处的单一半径.

下面的关于凸集的割迹半径的估计首先由 Cheeger-Gromoll 给出.

命题 7.17 假设 $\{\Omega_u\}, a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_m$ 如命题 7.16 所述, $T > a_m$, 再设 $K_0 = \max\{K(x) | x \in \Omega_{T+1}\}$ 是 M^n 在 Ω_{T+1} 上截面曲率的上界，则对 Ω_T 中任何一个连通凸集 A, 它的割集半径有个下界.

$$\delta_A \geqslant \delta_0(T) = \frac{1}{4}\min\left\{\mathrm{Inj}_{M^n}(\Omega_T), \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, 1\right\},$$

这里 $\delta_0(T)$ 是个不依赖 A 的常数.

证明 我们用反证法和内角比较定理证明这一点. 反设存在有不同的两点 $q_1 \neq q_2 \in A$ 和 $U_{\delta_0(T)}(A)$ 中的点 p 使得 $d(p, q_1) = d(p, q_2) = l < \delta_0(T)$. 考虑从 q_i 到 p 的最短测地线段 σ_i：$[0, l] \to M^n$. 由第一变分公式得出 $\measuredangle_{q_i}(\sigma_i'(0), A) \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. 因此, 测地三角形 $\triangle_{pq_1q_2}$ 在顶点 q_1 和 q_2 处的内角均不小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 另一方面, 在截面曲率为 K_0

的球面中我们考虑长度和 $\triangle_{pq_1q_2}$ 一样的新的等腰三角形 $\triangle^*$. 注意到 $l < \dfrac{\pi}{\sqrt{K_0}}$, 所以等腰三角形的两内角均小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 由内角比较定理 $\triangle_{pq_1q_2}$ 在 q_1 和 q_2 处的内角必小于 $\dfrac{\pi}{2}$, 矛盾.

对给定 $T > a_m$, 我们可以取定一个 $[0,T]$ 的分解 $u_0 = 0 < u_1 < \cdots < u_N = T$, 使得 $\{a_i\}_{i=1}^m$ 是 $\{u_j\}_{j=1}^N$ 的一个子集, 并且 $\Omega_{u_j} \subset U_{\delta_0(T)}(\Omega_{u_{j-1}})$.

用最短距离投影, 我们定义下列分段光滑测地线段.

定义 7.18 (Cheeger-Gromoll 分段测地线) 假设 $\{\Omega_u\}$, $T > a_m$, $\delta_0(T)$ 和分解 $0 = u_0 < u_1 \cdots < u_N = T$ 如上所述. 并且假设 $\mathcal{P}_{j-1}$: $\Omega_{u_j} \to \Omega_{u_{j-1}}$ 是个最短距离投影, 对 Ω_T 中的任何一点 x, 我们定义 $x_N = x$, $x_{N-1} = \mathcal{P}_{N-1}(x), \cdots, x_{j-1} = \mathcal{P}_{j-1}(x_j)$, 这里 $j = N, N-1, \cdots, 1$. 则分段测地线 $\{\sigma_j\}$ 称为连灵魂 S 和 x 的 Cheeger-Gromoll 分段测地线, 这里 σ_j 是连 x_{j-1} 到 x_j 的最短测地线段.

在上述定义里, 我们并不要求 $\{x_j\}$ 是个不重复的点列.

7.4.2 关于 Cheeger-Gromoll 凸集族的切锥的单调性质

假设 $\{\sigma_j\}$ 是个 Cheeger-Gromoll 分段光滑测地线, 假设 $x_{i-1} \neq x_i$. 则我们考虑测地线段 σ_i: $[0, l_i] \to M^n$. 它是从 x_{i-1} 到 x_i 的最短测地线段. 如存在 w_i 使得 $x_i \in \partial\Omega_{w_i}$, 我们定义

$$u_i(t) = \omega_i - d(\sigma_i(t), \partial\Omega_{\omega_i}),$$

根据定理 7.16, 我们有 $\sigma_i(t) \in \partial\Omega_{u_i(t)}$.

以下我们考虑切锥的变化. 对 M^n 中的任何一个子集 Ω 和 $y \in \Omega$, 我们定义 Ω 在 p 处的切锥为

$$T_y^-(\Omega) = \left\{ v \in T_y(M^n) \middle| \limsup_{t \to 0^+} \frac{d(\mathrm{Exp}_y(tv), \Omega)}{t} = 0 \right\},$$

这里 Exp_y 是指数映射.

注意到切锥不一定是个线性子空间. 即当 $v \in T_y^-(\Omega)$ 时, $-v$ 不一定属于这个切锥.

本节的目标是验证下列单调定理.

定理 7.19 假设 $\mathbb{P}_\sigma$ 是沿着 Cheeger-Gromoll 分段光滑测地线的平行移动, $\sigma = \{\sigma_j\}$ 和 $u_i(t)$ 如上所述. 则相对于平行移动 $\mathbb{P}_\sigma$, Cheeger-Gromoll 凸集族 $\{\Omega_u\}$ 的切锥是单调的. 即当 $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant l_i$ 时, 我们有

$$\mathbb{P}_\sigma[T^-_{\sigma_i(t)}(\Omega_{u_i(t_0)})] \subset T^-_{\sigma_i(t)}(\Omega_{u_i(t_1)}).$$

切锥的单调性质等价于相应的法锥的单调性质. 故我们引进法锥的定义.

定义 7.20　(1) 假设 Ω 是 M^n 中的一个紧凸集, 设 σ: $[0,l]\to M^n$ 是一条从 $\sigma(0)=p\in\Omega$ 出发的测地线, 如果 $\sigma'(0)$ 和切锥 $T_P^-(\Omega)$ 的角度 $\geqslant\dfrac{\pi}{2}$, 我们称 $\sigma'(0)$ 为 Ω 在 p 处的广义法向量.

(2) 紧凸集 Ω 在 M^n 中的法锥定义为

$$N^+(\Omega,M^n)=\{(p,v)|p\in\Omega,d(\mathrm{Exp}_p(tv),\Omega)=\|tv\|,\ 0\leqslant||tv||<\delta_\Omega\}.$$

类似地, 我们也可定义相对法锥 $N^+(\Omega_u,\mathrm{int}(\Omega_{u+\varepsilon}))$.

(3) (极小法向量) 假设 $(p,v)\in N^+(\Omega,\mathrm{int}(\Omega_{u+\varepsilon}))$, $v\neq0$, 设 $\sigma_{(p,v)}=\mathrm{Exp}_p\left(t\dfrac{v}{\|v\|}\right)$ 是连接 p 到 $\partial\Omega_{u+\varepsilon}$ 的最短测地线则称 v 为 Ω_u 在 p 处的极小法向量.

定理 7.19 的证明　回忆一下, 我们有单向等距曲面族 $\{\partial\Omega_u\}$, 即如果 $a_{j-1}\leqslant u\leqslant a_j$, 则

$$\Omega_u=\{x\in\Omega_{a_j}\ \big|\ d(x,\partial\Omega_{a_j})\geqslant a_j-u\},$$

对一个固定的 T. 反过来,Yim 也证明了有个仅依赖于 T 的常数 C_T, 使得

$$\max\{d(x,\Omega_a)\ \big|\ x\in\Omega_b\}\leqslant C_T(b-a),$$

这里 $0\leqslant a<b\leqslant T$(见 [Yim 1]~[Yim 2])

因此如果 $u\in[a_{j-1},a_j)$, 我们可以取

$$0=\varepsilon=\varepsilon_u=\min\left\{(a_j-u),\frac{\delta_0(T)}{C_T}\right\}.$$

在这种情况下, 我们有最短距离投影 $\mathcal{P}$: $\Omega_{u+\varepsilon}\to\Omega$, 并且有 $\Omega_u=\{x\in\Omega_{u+\varepsilon}\ \big|\ d(x,\partial\Omega_{u+\varepsilon})\geqslant\varepsilon\}$. 此时, 相对法锥 $N_p^+(\Omega_u,\Omega_{u+\varepsilon})$ 是等于由极小法向量张成的凸集. 所以我们仅仅需要验证下列论断:

论断 7.21　假定 v_0 是 $\Omega_{u(t_0)}$ 在 $\sigma(t_0)$ 处的一个极小法向量, 则 $\mathbb{P}_\sigma(v_0)$ 和切锥 $T^-_{\sigma(t_1)}(\Omega_{u(t_1)})$ 之间的夹角小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$.

这个论断可以采取如下方法验证. 不妨设 $v_0\neq\sigma'(t_0)$, 且令 ψ: $[u(t_0),u(t_1)]\to M^n$ 是一条由 v_0 决定的最小测地线 $\psi(u)=\mathrm{Exp}_{\sigma(t_0)}\left[(u-u(t_0))\dfrac{v_0}{\|v_0\|}\right]$, 记 $p_1=\psi(u(t_1))$. 现在我们考虑测地三角形 $\Delta_{\sigma(t_0)\sigma(t_1)p_1}$. 因为截面曲率 $K\geqslant0$, 故任何测地三角形的内角和必大于等于 π, 这一点可以由比较定理得出, 从而我们有

$$\measuredangle_{\sigma(t_1)}(p_1,\sigma(t_0))+\measuredangle_{\sigma(t_0)}(p_1,\sigma(t_1))\geqslant\pi-\measuredangle_{p_1}(\sigma(t_1),\sigma(t_0))\geqslant\frac{\pi}{2}.$$

这里我们用到 $\Omega_{u(t_1)}$ 的凸性质和 $\measuredangle_{p_1}(\sigma(t_1),\sigma(t_0)) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (因为 $-\psi'(t_1)$ 是 $\partial\Omega_{u(t_1)}$ 的内法向量). 令

$$\beta_v(t) = \measuredangle_{\sigma(t)}(\mathbb{P}_\sigma(v_0), T^-_{\sigma(t)}(\partial\Omega_{u(t)})).$$

我们的目标是证明 $\beta_v(t) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 对所有 $t \geqslant t_0$ 成立. 因为 $\beta_v(t_0) = \dfrac{\pi}{2}$, 我们只需证明

$$\left.\frac{\partial^+\beta}{\partial t}\right|_{t_0} \leqslant 0$$

对所有 t_0 成立. 实际上, 我们只需证明

$$\beta(t_1) \leqslant \beta(t_0) + O(|t_1 - t_0|^2), \tag{7.17}$$

这里 $O(\varepsilon^2)$ 是一个阶数为 2 的误差项. 上述不等式可以用 Fermi 坐标来证明. 假设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 $T_{\sigma(t_0)}(\Omega)$ 的一个正交基, 记 $\{E_1(t), \cdots, E_m(t)\}$ 为 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 沿 σ 的平行移动. 则 Fermi 坐标由下列映射给出

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R} \times [t_0, t_1] \to M^n, \\ & (x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m) \to \mathrm{Exp}_{\sigma(x_m)}\left[\sum_{k=1}^{m-1} x_k E_k(s)\right]. \end{aligned}$$

众所周知, Fermi 映射在零截影处的导数为恒等映射, 即如果 F_* 为 F 的导数映射则有

$$F_*\big|_{(0,\cdots,0,x_m)} = Id \tag{7.18}$$

对所有 x_m 成立.

令 $\mathbb{R}^2_{t_0} = \mathrm{Span}\{\sigma'(t_0), v_0\}$ 是由 $\sigma'(t_0)$ 和 v_0 张成的 2 维线性子空间. 记 ϕ_{t_1}: $[0, b(t_1)] \to M^n$ 是由 $\sigma(t_1)$ 到 p_1 的最短测地线, 令 $\mathbb{R}^2_{t_1} = \mathrm{Span}\{\sigma'(t_1), \phi'_{t_1}(0)\}$ 是由 $\sigma'(t_1)$ 和 $\phi'_{t_1}(0)$ 张成的 2 维线性子空间. 根据 (7.18) 得出

$$\measuredangle_{\sigma(t_1)}(\mathbb{R}^2_{t_1}, \mathbb{P}_\sigma(\mathbb{R}_{t_0})) = O(|t_1 - t_0|^2), \tag{7.19}$$

这里 $O(l^2)$ 表示一个和 l^2 相同阶的项.

记 $v(t) = \mathbb{P}_\sigma(v_0)\big|_{\sigma(t)}$, 定义 $\beta(t) = \measuredangle(v(t), T^-_{\sigma(t)}(\Omega_{u(t)}))$ 如上, 我们得出

$$\begin{aligned} \beta_v(t_1) &\leqslant \measuredangle_{\sigma(t_1)}(v(t_1), p_1) \\ &= \pi - [\measuredangle_{\sigma(t_1)}(\sigma'(t_1), v(t_1)) + \measuredangle_{\sigma(t_1)}(p_1 - \sigma'(t_1))] + O(|t_1 - t_0|^2) \\ &= \pi - [\measuredangle_{\sigma(t_0)}(\sigma(t_1), p_1) + \measuredangle_{\sigma(t_1)}(p_1, \sigma(t_0))] + O(|t_1 - t_0|^2) \\ &\leqslant \frac{\pi}{2} + O(|t_1 - t_0|^2). \\ &= \beta(t_0) + O(|t_1 - t_0|^2). \end{aligned}$$

因此 $\left.\dfrac{\partial^+\beta}{\partial t}\right|_{t_0} \leqslant 0$ 是单调函数. 论断 7.21 成立.

当 $\sigma'(t_0) = \dfrac{v_0}{\|v_0\|}$ 时, σ 是一条连接 $\sigma(t_0)$ 到 $\partial\Omega_{u(t_1)}$ 的极小测地线. 由第一变分公式得出, 切锥 $T^-_{\sigma(t_1)}(\Omega_{u(t_1)})$ 是个由 $-\sigma'(t_1)$ 决定的半空间. 因为 Ω_u 凸, 所以全部切锥为凸并且包含在某个半空间内. 故此时, 论断 7.21 也成立. 定理 7.19 证完. 证毕.

7.4.3　分段光滑平坦带定理的证明

在本节中我们要完成 Cheeger-Gromoll 灵魂猜想的证明.

定理 7.15 的证明　回忆一下, M^n 的灵魂 S 是个全测地的光滑子流形. 如果 $\dim[S] \geqslant 1$, 则我们可以取一条具有单位速度的测地线 c_0: $\mathbb{R} \to S$ 使得 $c_0(0) = x_0$ 和 $\|c_0'(0)\| = 1$. 令 $\{V_1(s)\}$ 为测地线 c_0 上平行向量场使得 $V_1(0) = \sigma_1'(0)$, 这里 $\{\sigma_j\}$ 是一条 Cheeger-Gromoll 分段光滑测地线. 我们考虑

$$\begin{aligned}\phi_1:\quad & \mathbb{R}\times[0,l_1] \to M^n,\\ & (s,t) \to \mathrm{Exp}_{c_0(s)}[tV_1(s)].\end{aligned}$$

我们的第一个目标是验证下列结论.

论断 7.22　假设 $M^n, \{\Omega_u\}, \{p_j\}, \{x_j\}, \{\sigma_j\}$ 和 ϕ_1 如上所述. 则下列结论成立:

(1) 相对于测地线 $c_0 \hookrightarrow S$, 上平行移动 $\mathbb{P}_{c_0}$, 法锥 $N^+(S, \Omega_\varepsilon)$ 是不变的;

(2) 上面映射 ϕ_1 是全测地的浸入; 从而

(3) 水平向量场 $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial s}(s,t)$ 是测地线 $t \to \phi_1(s,t)$ 上的平行向量场;

(4) 由 $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial s}$ 和 $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial t}$ 张成的截面曲率

$$K\Big(\frac{\partial\phi_1}{\partial s}, \frac{\partial\phi_1}{\partial t}\Big) = \Big\langle R\Big(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}, \frac{\partial\phi_1}{\partial s}\Big)\frac{\partial\phi_1}{\partial t}, \frac{\partial\phi_1}{\partial s}\Big\rangle \equiv 0.$$

如果 $V_1'(0) = \sigma_1'(0)$ 是一个极小法向量, 则测地线段 σ_1: $[0, l_1] \to M^n$ 是连接 S 和 $\partial\Omega_{l_1}$ 的最短测地线, 用第二变分公式, Cheeger-Gromoll 证明了论断 7.22 成立, 见 [ChG] 中定理 1.10.

我们以前指出 $N^+(S, \Omega_\varepsilon)$ 由极小法向量张成, 所以根据 [ChG] 中的定理 1.10, 相对于沿测地线 c_0 上的平行移动, 极小法向量经平行移动后仍然是极小法向量. 因此论断 7.22(1) 成立.

对于一个任意固定的 $\hat{s} \in \mathbb{R}$, 我们考虑一条相应的垂直测地线

$$\sigma_{\hat{s}}: t \to \phi_1(\hat{s}, t)$$

和 $\sigma_{\hat{s}}$ 上的一个平行向量场 $\{W_j(t)\}$, 这里我们要求 $W_j(0) = c_0'(\hat{s}) = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial s}(\hat{s}, 0)$.

我们的目标是证明

$$W_{\hat{s}}(t) \equiv \frac{\partial \phi_1}{\partial s}(\hat{s}, t), \tag{7.20}$$

对所有 $\hat{s}$ 和 t 成立, 不难看出论断 7.22 是等式 (7.20) 的直接推论.$\Big($因为 $\nabla_{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} W \equiv 0$, 我们要求 $W_{\hat{s}}(.)$ 是个平行向量场.$\Big)$

关于等式 (7.20) 的验证需要分几步进行.

第一步 令 a_1 由命题 7.16 给出, $u(t) = -d(\sigma_{\hat{s}}(t), \partial\Omega_{a_1}) + a_1$ 则我们首先证明 $\pm W_{\hat{s}}(t) \in T(\partial\Omega_{u(t)})$.

由定理 7.19 关于切锥的单调性, 我们注意到 $\pm W_{\hat{s}}(0) = \pm c_0'(\hat{s}) \in T_{\sigma_{\hat{s}(0)}}(S)$, 从而必有

$$\pm W_{\hat{s}}(t) \in T^-_{\sigma_{\hat{s}}(t)}(\partial\Omega_{u(t)}).$$

根据 Cheeger-Gromoll 的构造,$\{\Omega_u\}$都是凸集, 故我们必有$\pm W_{\hat{s}}(t) \in T^-_{\sigma(t)}(\partial\Omega_{u(t)})$. 我们的第一步完成.

第二步 Calabi 的承载曲面技巧 (barrier surface method). 因为平行向量场 $\pm W_{\hat{s}}(t)$ 相切超曲面族 $\{\partial\Omega_{u(t)}\}$ 我们可以有 $\phi_1(\mathbb{R} \times [0, l_1])$ 在 $\sigma_{\hat{s}}$ 上相切的包络面和

$$\begin{aligned} \Psi_{1,\hat{s}}\text{:}\quad & \mathbb{R} \times [0, l_1] \to M^n, \\ & (s, t) \to \mathrm{Exp}_{\sigma_{\hat{s}}(t)}[sW_{\hat{s}}(t)]. \end{aligned}$$

这样的包络面 $\Sigma^2_{1,\hat{s}} = \bar{\Psi}_{1,\hat{s}}(\mathbb{R} \times [0, l_1])$ 和它的子集 $\hat{\Sigma}^2_{1,\hat{s}} = \Psi_{1,\hat{s}}((-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l_1])$ 都在测地段 $\sigma_{\hat{s}}$ 上是全测地. 这可以从下面的等式看出

$$\nabla_{\frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial t}} \frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial t}} \frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial t}\bigg|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial s}} \frac{\partial \Psi_{1,\hat{s}}}{\partial s}\bigg|_{s=0} = 0,$$

所以它们第二基本形式 $\mathrm{II}_{\hat{\Sigma}^2_{1,\hat{s}}}(X, Y)|_{(0,t)} \equiv 0$.

可惜的是, 如果我们令

$$\gamma_t = \hat{\Sigma}^2_{1,\hat{s}} \bigcap \partial\Omega_{u(t)},$$

曲线族 $\{\gamma_t\}_{t \in [0, l_1]}$ 不是一个等距离曲线族. 受 Calabi[Ca] 的工作启发, 对原有的距离函数

$$h(x) = d_{M^n}(x, c_0(\mathbb{R})),$$

我们考虑 h 的一个上闸函数 (upper barrier function)

$$\hat{h}(x) = d_{\hat{\Sigma}^2_{1,\hat{s}}}(x, c_0(\mathbb{R})).$$

令 $\hat{\gamma}_t = \hat{\Sigma}^2_{1,\hat{s}} \bigcap \hat{h}^{-1}(t)$, 则单参数曲线族 $\{\hat{\gamma}_t\}$ 变为一个等距曲线族. 在 $\sigma_{\hat{s}}(\cdot)$ 上两个函数 h 和 $\hat{h}$ 重合. 根据 Calabi 关于广义二阶导数的定义, 我们有

$$\hat{\lambda}(t) = \mathrm{Hess}_{\hat{\Sigma}}(\hat{h})(W_{\hat{s}}(t), W_{\hat{s}}(t)) \geqslant \mathrm{Hess}_{M^n}(h)(W_{\hat{s}}(t), W_{\hat{s}}(t)) = \lambda(t).$$

回忆一下, $\hat{\Sigma}^2_{1,s}$ 在 $\sigma_{\hat{s}}(\cdot)$ 上全测地, 我们更有

$$K(t) = K_{M^n}(t) = \langle R_{M^n}(\sigma'_{\hat{s}}(t), W_{\hat{s}}(t))\sigma'_{\hat{s}}(t), W_s(t)\rangle = K_{\hat{\Sigma}^2_{1,s}}(t), \tag{7.21}$$

因此, 我们可以从下面的 Riccati 方程

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^2 + \dfrac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} + K(t) \equiv 0, \\ \hat{\lambda}(0) = 0, \end{cases} \tag{7.22}$$

得出 $\dfrac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} = -[\hat{\lambda}(t)]^2 - K(t) \leqslant 0$ 和 $\hat{\lambda}(t) \leqslant 0$. 但是 $\{\Omega_u\}$ 是凸集族, 我们也有 $\lambda(t) \geqslant 0$, 从而

$$0 \geqslant \hat{\lambda}(t) \geqslant \lambda(t) \geqslant 0.$$

因此, 我们得到

$$\hat{\lambda}(t) \equiv \lambda(t) \equiv 0. \tag{7.23}$$

再由 Riccati 方程和 (7.21), 我们得出

$$K_{M^n}(t) = K(t) \equiv 0. \tag{7.24}$$

众所周知, 二次型 $(X, Y) \to \langle R(\sigma'_{1,\hat{s}}(t), X)\sigma'(t), Y\rangle$ 是对称的. 如截面曲率非负, 该二次型是半正定的, 由二次型的半正定性质和 (7.24) 推出,$W_{\hat{s}}(t)$ 必然是曲率算子 $X \to R(\sigma'_{\hat{s}}(t), X)\sigma'_{\hat{s}}(t)$ 的一个特征向量, 且相应的特征值为零.

第三步　Jacobi 场的唯一性质的应用. 由于平行向量场 $\{W_{\hat{s}}(t)\}$ 是曲率算子

$$X \to R_{M^n}(\sigma'_{\hat{s}}(t), X)\sigma'_{\hat{s}}(t)$$

的特征向量且相应特征值为零. 则 $\{W_{\hat{s}}(t)\}$ 满足 Jacobi 场方程

$$J'' + R(\sigma', J)\sigma' \equiv 0.$$

我们注意到 $\{W_{\hat{s}}(t)\}$ 和向量场 $\left\{\frac{\partial\phi_1}{\partial s}(\hat{s},t)\right\}_{t\in[0,l_1]}$ 是两个 Jacobi 场且有相同的初始条件

$$\begin{cases} J(0)=c_0'(0)=\dfrac{\partial\phi_1}{\partial s}(\hat{s},0), \\ J'(0)=0, \end{cases}$$

因此两个向量场必相等, 从而等式 (7.20) 成立, 论断 7.22 得证.

下面我们用数学归纳法完成定理 7.15 的证明. 假设下面论断当 $(j-1)$ 时是对的.

论断 A.j 令 $c_{j-1}=\phi_{j-1}(s,l_{j-1})$ 和令 $\{V_j(s)\}$ 是满 $V_j(0)=\sigma_j'(0)$ 的沿 c_{j-1} 上的平行向量场, 则法锥 $N^+(\Omega_{u_{j-1}},\Omega_{u_{j-1}+\varepsilon})$ 相对于平行移动不变, 而且

$$\begin{aligned} \phi_j\colon\quad & \mathbb{R}\times[0,l_j]\to M^n, \\ & (s,t)\to \mathrm{Exp}_{c_{j-1}(s)}[tV_j(s)] \end{aligned}$$

是个全测地浸入.

先看 $j=2$. 时, 我们看到 $c_1(\mathbb{R})$ 必包含在某个 $\Omega_{\hat{T}}$ 里, 由论断 7.22 的证明得出$c_1(\mathbb{R})\subset\partial\Omega_{u_1}$. 再应用[ChG]的定理 7.10 和 Yim 的结果, 我们知$N^+(\Omega_{u_{j-1}},\Omega_{u_{j-1}+\varepsilon})$ 在 c_0 上的平行移动不变. 用关于论断 7.22 的证明中相同方法可以证明 ϕ_2 是个全测地浸入.

当 $j\geqslant 2$ 时证明方法一样, 从而论断 A.j 对所有 j 成立, 进而 Cheeger-Gromoll 灵魂猜想是正确的. 证毕.

习 题 七

(含未解决的问题)

1. 令 $M^3=S^3(1)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ 为 $\mathbb{R}^4$ 中的 3 维单位球面,$\mathbb{Z}_k=\mathbb{Z}/\{k\mathbb{Z}\}$ 是个 k 循环群. 证明

$$\begin{aligned} h_j\colon\quad & \mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2, \\ & (z_1,z_2)\to\left(e^{\sqrt{-1}\frac{2j\pi}{k}}z_1, e^{\sqrt{-1}\frac{2j\pi}{k}}z_2\right) \end{aligned}$$

是个等距旋转, 从而保持 $M^3=S^3(1)$ 不变. 计算商空间 $S^3(1)/\hat{\mathbb{Z}}_k=\hat{M}_k^3$ 的基本群, 这里 $\hat{\mathbb{Z}}_k=\{h_1,\cdots,h_k\}$.

2. 设 (M^{2n},g) 是 $2n$ 维具有正截面曲率的 Riemann 流形,$K_{M^n}\geqslant 1$. 又设 $\sigma\colon S^1\to M^{2n}$ 是一条光滑闭测地线, 令 $\mathbb{P}_\sigma\colon T_{\sigma(1)}(M^{2n})\to T_{\sigma(1)}(M^{2n})$ 是沿 σ 上的平行移动, 这里 $\sigma(e^{i\theta})$ 以 $e^{i\theta}\in S^1$ 为参数. 则

(i) 证明 $\mathbb{P}_\sigma$ 是等距正交变换.

(ii) 如果 $\dim(M^{2n}) = 2n$ 为偶数并假设 M^{2n} 可定向, 找出 $v \perp \sigma'(1)$ 使得 v 为 $\mathbb{P}_\sigma$ 的等征向量场.

(iii) 如 M^{2n} 可定向, 用第二变分公式证明 $\pi_1(M^{2n}) = 1$, 即 M^{2n} 的基本群为平凡群.

(iv) (Synge 定理) 试证明 $\pi_1(M^{2n})$ 或为平凡或为 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/\{2\mathbb{Z}\}$.

(v) 陈省身关于基本群的猜想在偶数维时成立吗?

3. (Cheeger-Gromoll 向量丛问题) 假设

$$\mathbb{R}^k \to M^{n+k} \to S^n(1)$$

是个标准球面 $S^n(1)$ 上的一个向量丛. 问 M^{n+k} 是否容许一个具有非负截面曲率的度量?

4 (Hopf 猜想). 问 $S^2 \times S^2$ 是否容许一个具有正截面曲率的 Riemann 度量?

参 考 文 献

[ChC] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 1983

[WuC] 伍鸿熙, 陈维桓. 黎曼几何选讲. 北京: 北京大学出版社, 1993

[WSY] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步. 北京: 北京大学出版社, 1989

[YaS] 丘成桐, 孙理察. 微分几何. 北京: 科学出版社, 1988

[An] Anosov D V. Geodesic flow on Riemannian manifolds of negative curvature. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No.90. Translated from the Russian by S. Feder. Providence: American Mathematical Society, 1969

[Av] Avez A. Variétés riemanniennes sans points focaux. C. R. Acad. Sc. Paris, 1970, 270: 188～191

[BBB] Ballmann W, Brin M, Burns K. On surfaces with no conjugate points. J. Differential Geom., 1987, 25: 249～273

[BCG] Besson G, Courtois G, Gallot S. Entropier et rigidits des espaces localement symmetriques de curbure strictement negative. Geom. Anal. Functional Anal. (GAFA), 1995, 5: 731～799

[Beg] Berger M. Riemannian geometry during the second half of the twentieth century. Reprint of the 1998 original. University Lecture Series, vol 17. Providence: American Mathematical Society, 2000

[Be1] Besse A L. Manifolds all of whose geodesics are closed. New York: Springer-Verlag, 1978

[Be2] Besse A L. Einstein Manifolds. New York: Springer-Verlag, 1987

[BGM] Ballmann W, Gromov M, Schroeder V. Manifolds of non-positive curvature. Progress in Math., vol 61. Berlin: Birkh äuser, 1985

[BI] Burago D, Ivanov S. Remannian tori without conjugate points are flat. Geom. Anal. Functional Anal. (GAFA), 1994, 4: 259～269

[Bu1] Buyalo S. Homotopy invariance of some geometric property of non-positively curved three manifolds. St. Petersburg Math. J., 1992, 3: 791～808

[Bu2] Buyalo S. Three dimensional manifolds with Cr-structure. In: Some Questions of Geometry in the large. AMS Translations, 1996, 176: 1～26

[Ca] Calabi E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry. Duke Math. J., 1957, 18: 45～56

[CaS1] Cao J, Shaw M. The smoothness of Riemannian submersions with nonnegative sectional curvature. Comm. Contemporary Math., 2005, 7: 137～144

[CaS2] Cao J, Shaw M. A new proof of the Cheeger-Gromoll soul conjecture and the Takeuchi theorem. Preprint, 2003, sfubmitted

[CCR1] Cao J, Cheeger J, Rong X. Splittings and Cr-structure for manifolds with non-positive sectional curvature. Invent. Math., 2001, 144: 139～167

[CCR2] Cao J, Cheeger J, Rong X. Local splitting structures on nonpositively curved manifolds and semirigidity in dimension 3. In: A special volume in honor of P. Li. Comm. Anal. Geom., 2004, 12: 391～417

[Cha] Chavel I. Riemannian Geometry—A modern introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

[ChE] Cheeger J, Ebin D. Comparison theorems in Riemannian geometry. New York: American Elsevier Publishing Co., 1975

[Che1] Cheeger J. Some examples of manifolds of non-negative curvature. J. Differential Geom., 1973, 8: 623∼628

[Che2] Cheeger J. Critical points of distance functions and applications to geometry. Springer Lecture Notes 1504, 1991, 1∼38

[ChG] Cheeger J, Gromoll D. On the structure of complete manifolds of non-negative curvature. Ann. Math., 1972, 96: 413∼443

[Cr1] Croke C. Rigidity for surfaces of non-positive curvature. Comm. Math. Helv., 1990, 65: 150∼169

[Cr2] Croke C. Conjugacy rigidity for non-positively curved graph-manifolds. Egodic Theory Dynam. Systems, 2004, 24: 723∼733

[Cr3] Croke C. Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 1980, 13: 419∼435

[DoC] Do Carmo M. Riemannian Geometry. Berlin: Birkhäuser, 1992

[Eb] Eberlein P. Geometry of non-positively curved manifolds. Chicago Lectures in Mathematics. Chicago: University of Chicago Press, 1996

[Eb1] Eberlein P. When is a geodesic flow of Anosov type? I. J. Differential Geom., 1973, 8: 437∼463

[Eb2] Eberlein P. When is a geodesic flow of Anosov type? II. J. Differential Geom., 1973, 8: 565∼577

[Eb3] Eberlein P. Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 167: 151∼170

[Eb4] Eberlein P. Isometry groups of simply connected manifolds of non-positive curvature II. Acta Math., 1982, 149: 41∼69

[Es1] Eschenburg J H. Horospheres and the stable part of geodesic flow. Math. Z., 1977, 153: 237∼251

[Es2] Eschenburg J H. Inhomogeneous space of positive curvature. Diff. Geom. Appl., 1992, 2: 123∼132

[FJ1] Farrell T, Jones L. A topological analogue of Mostow's rigidity theorem. J. Amer. Math. Soc., 1989, 2: 257∼370

[FJ2] Farrell T, Jones L. Negatively curved manifolds with exotic smooth structures. J. Amer. Math. Soc., 1989, 2: 899∼908

[GHL] Gallot S, Hulin D, Lafontaine J. Riemannian Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1987

[Go1] Goto M. Manifolds without focal points. J. Differential Geom., 1978, 13: 341∼359

[Go2] Goto M. The cone topology on a manifolds without focal points. J. Differential Geom., 1979, 14: 595∼598

[Gr] Green L. A theorem of Hopf. Mich. Math. J., 1958, 5: 31∼34

[GW] Gromoll D, Wolf J. Some relations between the metric structure and the algebraic structure of fundamental group in manifolds of non-positive curvature. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, 77: 545∼552

[Gr1] Gromov M. Curvature, diameter and Betti numbers. Comm. Math. Helv., 1981, 56: 159∼195

[Gr2] Gromov M. Filling Riemannian Manifolds. J. Differential Geom., 1983, 18: 1∼147

[Gr3] Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Progress in Math., vol 152. Berlin: Birkhäuser, 1998

[Gv] Grove K. Riemannian Geometry, A metric entrance. Department of Mathematics, University of Aarhus, Demark, 1999

[GZ] Grove K, Ziller W. Curvature and symmetry of Milnor spheres. Ann. Math., 2000, 152: 331∼367

[Gu] Gulliver R. On the variety of manifolds without conjugate points. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 210: 185∼201

[Hi] Hitchin N. Harmonic spinors. Advances in Math., 1974, 14: 1∼55

[Ho] Hopf E. Closed surfaces without conjugate points. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948, 34: 47∼51

[Jo] Jost J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1995

[Kü] Kühnel W. Differential Geometry, curves-surfaces-manifolds. Student Mathematical Library, vol 16. Providence: American Mathematical Society, 2002

[LY] Lawson B, Yau S T. Compact manifolds of non-positive curvature. J. Differential Geom., 1972, 7: 211∼228

[M1] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. Math., 1956, 64: 399∼405

[M2] Milnor J. Morse Theory. Ann. Math. Studies, vol 51. Princeton: Princeton University Press, 1963

[O'S1] O'Sullivan J. Manifolds without conjugate points. Math. Ann., 1974, 210: 295∼311

[O'S2] O'Sullivan J. Riemannian manifolds without focal points. J. Differential Geom., 1976, 11: 321∼333

[Ot] Otal J P. Le spectre marque des longuenrs des á courbure négative. Ann. Math., 1990, 131: 151∼162

[P] Perelman G. Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll. J. Differential Geom., 1994, 40: 209∼212

[Pe] Peters S. Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds. J. Reine Angew. Math., 1984, 349: 77∼82

[Pt] Petersen P. Riemannian Geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol 171. New York: Springer-Verlag, 1998

[Pu] Pu P M. Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds. Pacific J. Math., 1962, 11: 55∼71

[R1] Rong X. The almost cyclic of fundamental groups of positively curved manifolds. Invent. Math., 1996, 126: 47∼64

[R2] Rong X. On the fundamental groups of manifolds of positive curvature. Ann. Math., 1996, 143: 397∼411

[Sa] Sakai T. Riemannian Geometry. Translations of Mathematical Monographs, vol 149. Providence: American Mathematical Society, 1996

[Sc] Schroeder V. Rigidity of non-positively curved graph-manifolds. Math. Ann., 1986, 274: 19∼26

[Sh] Shankar K. On the fundamental groups of positively curved manifolds. J. Differential Geom., 1998, 49: 179∼182

[Shv] Sharafutidnov V A. The Pogorelov-Klingenberg theorem for manifolds that are homeomorphic to $\mathbb{R}^n$. Sirbirsuk Math. Z. (Russian), 1977, 18: 915∼925. Siberian Math. J., 1977, 18: 649∼657

[Y1] Yau S T. On the fundamental group of compact manifolds of non-positive curvature. Ann. Math., 1971, 93: 579∼585

[Y2] Yau S T. Problem Section. In: Seminar on differential geometry. Ann. Math. Studies, 1971, 102: 669∼706

[Y3] Yau S T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry. Indiana Univ. Math. J., 1976, 25: 659∼670

[Yim1] Yim J W. Distance non-increasing retraction on a complete open manifold of non-negative sectional curvature. Ann. Global Anal. Geom., 1988, 6: 191∼206

[Yim2] Yim J W. Spaces of souls in a complete open manifold of non-negative curvature. J. Differential Geom., 1992, 32: 429∼455

[Zh] Zheng F. Complex Differential Geometry. AMS/IP Studies in advanced mathematics, vol 18. Providence: American Mathematical Society, 2000